应用数学丛书

偏微分方程的应用

[日] 犬井铁郎 宫岛龙兴 木原太郎 著

上海科学技术出版社

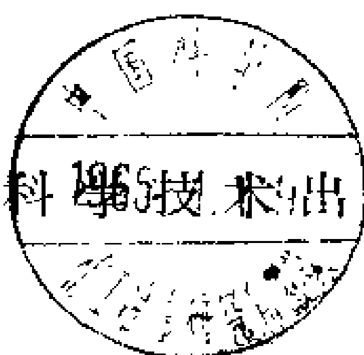
現代应用数学丛书

偏微分方程的应用

犬井鉄郎
〔日〕宫島龙兴　著
木原太郎

楊永芳　譯

張质賢等校



上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。主要內容着眼于偏微分方程的应用，前四章介紹在处理本征值問題及边界值問題时所常用的种种方法和物理意义，后四章以扩散、散射、折射、电磁波以及等离子体等专題为中心，具体地介紹了偏微分方程在各方面的应用。可供大专院校理工科师生参考，也可供工程师、科学研究工作者参考。

原书分三册，第 1 章至第 4 章为第一册，第 5 章至第 6 章为第二册，第 7 章至第 8 章为第三册。現合并为一册出版。

偏微分方程式の応用 I II III
犬井鐵郎 · 宮島龍興 · 木原太郎
岩波书店 1958

現代应用数学丛书
偏微分方程的应用
楊永芳 譯 张质賢等 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 9 24/32 排版字数 229,000
1965 年 3 月第 1 版 1965 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—8,000

統一书号 13119·601 定价(科六) 1.50 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。书中收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国科学技术工作者可能是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在某些譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　录

第1章　一般积分与边界条件[1]

§1 綫性二阶偏微分方程的积分曲面

1) 一維波动方程的一般解　物理学或工程应用的基本方程中最常出现的偏微分方程是綫性二阶的。其中以两个自变数的情形最为簡单，所以我們就从这里說起。

例如在弦振动的情形，若把表示弦的平衡位置的直綫取作 x 軸，且用坐标 x 表示弦上的点，因为对应坐标 x 的点 P 的横位移 u 不但和 x 有关，而且也随着时間 t 而变动，所以 $u=u(x, t)$. 其中自变数 x 是坐标变数，第二自变数 t 是时間变数，这时取表示 x, t 的直交坐标軸，并取因变数 $u(x, t)$ 为第三軸而得三維直角坐标系，于是横位移与位置及时間的关系就能用三維空間 x, t, u 内的曲面来表达。

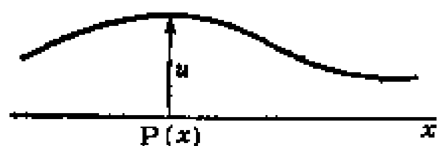


图　1.1

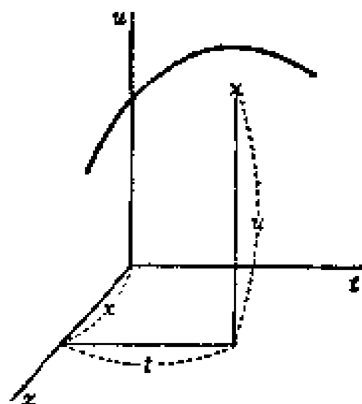


图　1.2

我們知道，因变数 $u(x, t)$ 以特定的形状依賴于 x, t，即一維波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.1}$$

永远成立，就是說因变数 $u=u(x, t)$ 必須适合偏微分方程 (1.1)，习惯上，把适合微分方程的函数 u 称为解又称为积分，所以图 1.2 所表示的曲面就是偏微分方程 (1.1) 的**积分曲面**。而解偏微分方

---

[1] 第1章到第4章由犬井鐵郎执笔。

程这一事实，用几何或形象的說法，就是求积分曲面的問題。从今以后我們就考察求积分曲面的問題。若把(1.1)的 t 置换为

$$ct=y, \tag{1.2}$$

就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1.3}$$

設 F, G 是任意函数，则方程的解是

$$u(x, y)=F(x+y)+G(x-y), \tag{1.4}$$

因为作了偏微分之后立即可以看出 F, G 都适合 (1.3)，(1.3) 既然是綫性方程，所以两个解 F, G 的和当然也是它的解。由此可見，(1.3)的解是由 $x+y$ 的任意函数 F 以及 $x-y$ 的任意函数 G 的和所給出的（迭加原理）。二阶偏微分方程的包含两个任意函数的解通常叫做**一般解**。这样(1.4)就是(1.3)的一般解。

如果使用积分曲面这一名辞，积分曲面 (1.4) 是由任意函数 $F(x+y)$ 及 $G(x-y)$ 所表示的二曲面之和給出的。回到原来的变数，波动方程(1.1)的积分曲面是

$$u(x, t)=F(x+ct)+G(x-ct). \tag{1.5}$$

从物理意义上說，F 表示随时間以常速度 c 沿着 x 減退方向（即 $-x$ 的方向）运动的波形，G 则表示随时間以常速度 c 沿着 x 增加方向（即 $+x$ 的方向）运动的波形❶。

例如令 $u(x, t)=G(x-ct)$ 并当 x, t 分别变为 $x+\Delta x$, $t+\Delta t$ 时，規定

$$G(x-ct)=G((x+\Delta x)-c(t+\Delta t))$$

就可以了解 G 的物理意义（波形的傳播）。

2) 一維波动方程的一般解与始值問題　由上可知，波动方程的积分曲面可以作为沿 $\pm x$ 方向傳播的任意二行波的曲面之和。因为它是波动方程

❶ 它們分别称为沿着 $+x$ 方向及 $-x$ 方向运动的行波。——譯者注

的积分曲面，所以也称为波动曲面。这样得来的波动曲面由于 $F(x+ct)$ 及 $G(x-ct)$ 的二函数 F, G 是随意的，因此就过于广泛了，以致不能够确定它的形状。

从物理的意义来考虑，如果在某一时刻知道了弦的各点的位置，以及各点以怎样的速度开始运动，那么可以想象后来的运动将被决定，也就能决定弦将产生什么样的波形。这种直观的想法是否真的在数学上能証明呢？設初始时刻为 $t=0$，并把上述条件用式子来表达。即設所求的积分曲面是 $u(x, t)$，并設 $t=0$ 时的条件是

$$u(x, 0)=\varphi(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\psi(x). \tag{1.6'}$$

求偏微分方程 (1.1)，适合上述条件的問題称为初始值問題或簡称**始值問題**。在(1.5)中令 $t=0$，把所得的式子代入 (1.6)，再把 (1.5) 就 t 作偏微分，然后令 $t=0$，最后代入(1.6')即得

$$F(x)+G(x)=\varphi(x), \quad F'(x)-G'(x)=\psi(x)/c. \tag{1.7}$$

积分第二式得出 $F(x)-G(x)$，再結合前式就得到

$$\left.\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi\right\}, \\ G(x)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

由(1.8)作出 $F(x+ct)$ 以及 $G(x-ct)$，然后代入(1.5)，就得到

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi. \tag{1.9}$$

这是适合初始値条件(1.6)，(1.6')的波动方程 (1.1) 的解，称为关于波动的 **Stokes 公式**。"初始値条件規定了 φ 及 ψ 的形状，所以(1.1)的积分曲面能由(1.9)唯一确定"。于是結果和我們的想象完全符合，即根据初始条件能确定积分曲面的形状。这个結論是合理的，就是說，根据物理的观点在各点給定了初始位移和速度后，就能唯一确定所求的解。

一般在物理以及工程中与其說求所給偏微分方程的一般解是重要的問題，毋宁說求满足根据物理的需要，而指定的附加条件的解具有更重大的意义。但是如果附加条件过多的話，所求的积分曲面可能不存在。如果条件过少的話，适合条件的解有任意多个，使得无法确定作为答案的积分曲面。

§2 关于綫性二阶偏微分方程的 Cauchy 問題　特征条件与特征曲綫

如果作为討論对象的偏微分方程不局限于波动方程，設方程的一般形状是

$$L[u]\equiv A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\Phi\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.1}$$

这里 $A(x,y)$，$B(x,y)$，$C(x,y)$ 是 x，y 的任意函数，在一定的附加条件下求方程的解的問題中，有一种問題，它的附加条件既以上述的初始值条件为特殊情况，又保証解的唯一性，这种問題称为 Cauchy 問題。

設 C_0 是 x，y，u 三維空間中任意的空間曲綫，Cauchy 曾經系統地研究了求通过 C_0 的 (2.1) 的积分曲面的問題，通称 C_0 为**初始曲綫**。当 C_0 已給时，考慮它投向 x，y 面上的正射影，并設所得的平面曲綫为 $\overline{C}_0$：

$$\varphi(x,y)=0, \tag{2.2}$$

这样沿着 $\overline{C}_0$ 积分曲面的高 u_0 也是已知的。通称 $\overline{C}_0$ 为**初始支柱**。普通不取 $\overline{C}_0$ 为(2.2)的形状，而取曲綫之長 σ 作为参数，并写成

$$x=x(\sigma),\quad y=y(\sigma), \tag{2.3}$$

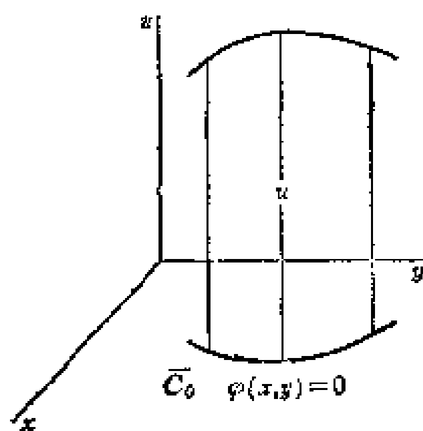


图　2.1

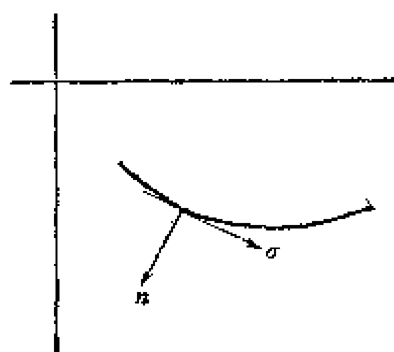


图　2.2

这样，为了规定 C_0 再給出 σ 的函数作为沿着 $\overline{C}_0$ 的曲面的高

$$u=u(\sigma). \tag{2.4}$$

除了条件(2.4)之外，并且还要規定沿着 $\overline{C}_0$ 关于法綫方向 n 的 u 的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial n}=N(\sigma). \tag{2.5}$$

因为沿着 $\overline{C}_0$ 从 (2.4) 已經給出 $u(\sigma)$，所以关于切綫方向 σ 的 u 的方向导数是确定的，即

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma)=\dot{u}. \tag{2.6}$$

这样就能够从(2.5)，(2.6)得到 u 沿着 $\overline{C}_0$ 关于 x 及 y 的偏导数

$$p\equiv\frac{\partial u}{\partial x},\quad q\equiv\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此我們就能认为沿着 $\overline{C}_0$ 不但給定了(2.3)，(2.4)而且給定了

$$p=p(\sigma),\quad q=q(\sigma). \tag{2.7}$$

在这里沿 $\overline{C}_0$ 确定的 $p(\sigma)$，$q(\sigma)$ 和在(2.3)，(2.4)所确定的 $x(\sigma)$，$y(\sigma)$，$u(\sigma)$ 之間，成立着关系式

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=p(\sigma)\frac{\partial x}{\partial \sigma}+q(\sigma)\frac{\partial y}{\partial \sigma}. \tag{2.8}$$

两个偏导数 p，q 沿着初始曲綫 C_0 能够从 (2.7) 确定这一事实，从几何意义来說；是通过 C_0 的所求的积分曲面沿着这条曲綫的切平面的方向是完全确定的。而且“在条件(2.8)成立的情况下在各点局部的切平面，当 σ 連續变动时，不发生交錯現象，而是圓滑地变动，即在 C_0 的附近以带状包絡着曲面。”因此称(2.8)为**成带条件**。

为了决定在 $\overline{C}_0$ 附近沿此曲綫的积分曲面，只要沿 $\overline{C}_0$ 把 u 的所有的偏导数都唯一确定下来便成了。理由是：这时沿 C_0 可唯一确定形如

$$\begin{aligned}u(x,y)=u(x_0,y_0)&+\Big[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\\&+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\Big]+\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\\&+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\&+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]+\cdots\end{aligned} \tag{2.9}$$

的关于 (x, y) 的二重 Taylor 級数，它在收斂圆内收斂，从而至少能够給出在 C_0 附近所求积分曲面的形状。根据偏微分方程論的結果，当給定初始条件时，如果沿 $\overline{C}_0$ 下列条件

$$A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2\neq 0 \tag{2.10}$$

成立的話，就能唯一确定 $\overline{C}_0$ 上任意点处的二阶偏导数 r, s, t. 进一步能証明"在同一条件下能够唯一确定任意的高阶偏导数"。这样当条件(2.10)沿着 $\overline{C}_0$ 到处成立时，可以断言"在 $\overline{C}_0$ 附近能够唯一确定积分曲面"。

相反，当

$$\Delta\equiv\dot{x}^2\{A(\dot{y}/\dot{x})^2-2B(\dot{y}/\dot{x})+C\}=0 \tag{2.11}$$

成立时，称这个关系为**特征关系**，在 x, y 平面的一点处使得 $\Delta=0$ 的方向称为**特征方向**。当初始支柱 $\overline{C}_0$ 的切綫方向与特征方向一致时，在此点用上面的方法就不能唯一确定 r, s, t 等偏导数。

当給定了沿初始支柱 $\overline{C}_0$ 的 $u(\sigma)$，以及 u 的法綫方向的导数 $N(\sigma)$时，求符合这些条件的偏微分方程 (2.1) 的积分曲面的問題称为 **Cauchy 問題**。

根据以上的討論，"如果对初始支柱 $\overline{C}_0$ 的任意点

$$\Delta\equiv A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2\neq 0 \tag{2.12}$$

成立，则 Cauchy 問題就有唯一的解"。反之，如果特征关系

$$\Delta=0$$

成立，则 Cauchy 問題的解一般說不存在。

特征关系到处成立的曲綫称为**特征曲綫**。所以按 (2.11)，特征曲綫可作为微分方程

$$\Delta\equiv Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \tag{2.13}$$

的解而求出。如果不采用参数表示，而将解写成形式

$$\varphi(x, y)=\text{常数}, \tag{2.14}$$

取此式的微分就能得到

$$dy/\varphi_x = -dx/\varphi_y. \tag{2.15}$$

因而可将(2.13)写成偏微分方程的形状:

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0. \tag{2.16}$$

(2.16)称为**特征偏微分方程**。

§3 二阶綫性偏微分方程的分类 双曲型,椭圓型,抛物型及其标准式

二阶綫性偏微分方程的一般形式是由(2.1)給出的,但是如果适当地选取自变数 x, y,就能够化成更简单的标准式。設新选的自变数是 ξ, η,它們是由变换

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{3.1}$$

給出的。象偏微分方程的一般理論那样,如果导入形如

$$Q(\varphi, \psi) = A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y \tag{3.2}$$

的式子,(2.1)的左端就能使用新变数写成

$$L[u] = Q(\varphi, \varphi)u_{\xi\xi} + 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + Q(\psi, \psi)u_{\eta\eta}$$
$$+ L[\varphi]u_\xi + L[\psi]u_\eta. \tag{3.3}$$

由此可知,如果所选的变换函数 φ, ψ 适合条件

$$Q(\varphi, \varphi) = 0, \quad Q(\psi, \psi) = 0, \tag{3.4}$$

那末(3.3)就能写成

$$L[u] = 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + \cdots, \tag{3.5}$$

这里面的…仅包含 u 的关于新变数 ξ, η 的一阶以下的偏导数。至于(2.1)的右端,即使改用新变数,也不会含有高于一阶的偏导数。于是知道所給的方程(2.1)經过变换之后,变成了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{3.6}$$

为了这样的变换能在实数范圍内施行,必須在实数范圍内寻求适合(3.4)的 φ 及 ψ,也就是說特征偏微分方程(2.16)应該具有实值的解,这个

事实能够化成下面的条件，即在(2.16)中，令 $\lambda=\varphi_x/\varphi_y$，将它变成二次方程

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0,\quad \lambda=\varphi_x/\varphi_y. \tag{3.7}$$

(3.7)应具有两个实根，故此必须成立

$$B^2-AC>0. \tag{3.8}$$

如果构成所给偏微分方程 (2.1) 的系数的函数 A, B, C 恒适合条件 (3.8) 时，则称(2.1)是**双曲型**的。例如一維波动方程(1.1)就是一个范例。双曲型方程在实値变换的范圍能轉化为簡单的形状 (3.6)。一般称 (3.6) 为双曲型方程的**标准式**。

与(3.8)相反，如果成立

$$B^2-AC<0, \tag{3.9}$$

即 (3.7) 的两根为复値时，则称方程 (2.1) 为**橢圓型**的。表示二維的势 (potential) 的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3.10}$$

就是范例。

对于橢圓型，当它变换为标准式(3.6)时，出現了复値变换，这是很不方便的。因而从(3.1)的 ξ, η 再进一步选取由

$$\sigma=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \tau=\frac{\xi-\eta}{2i} \tag{3.11}$$

所定义的新变数 σ, τ，結果(3.6)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=G\left(\sigma,\ \tau,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \sigma},\ \frac{\partial u}{\partial \tau}\right), \tag{3.12}$$

它是实値方程，称为橢圓型方程的标准式。

介于双曲型及橢圓型方程之間，若成立

$$B^2-AC=0, \tag{3.13}$$

则称方程为**抛物型**的。这时 ξ, η 之間不是相互无关的。如果令其中一个自变数保持不变 [$\varphi\equiv x$]，而选另一变数为(3.4)的解的 ψ，这么，結果就将原方程变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=G\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{3.14}$$

(3.14)称为抛物型的标准式。

于 x 方向伸延的导体的一維热傳导方程，如果把时間变数写为 t，就成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.15}$$

这是抛物型的范例。

§4 波动方程的解和初始值、边界值的关系

一維波动方程能簡单地求出一般解，同时也比較容易求它的适合附加条件的解，因此用来說明双曲型方程的重要性质就比較方便。本节对于这个例子所以要深入討論的原因，并非单純地为了波动方程自身，而是着眼于它对于双曲型方程的特征具有代表性的意义。

按照 §3 的方法，为了使波动方程变成标准式，选定新的自变数为 ξ, η,

$$\xi=x+y, \quad \eta=x-y. \tag{4.1}$$

从而得到了方程的新的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0, \tag{4.2}$$

由此可得一般解

$$u=F(\xi)+G(\eta). \tag{4.3}$$

还原为旧变数后，则得到原来的方程的一般解

$$u=F(x+y)+G(x-y)=F(x+ct)+G(x-ct). \tag{4.4}$$

从物理上說，它相当于沿着 x 軸的正負方向傳播的两个波动曲面的迭加。于是在时刻 t, x 处的波动 $u(x, t)$ 是两个成为基础的波动曲面 F, G 的重迭，但是对于波动曲面 F, G，根据 §1 中的結果，可以从初始条件 (1.6), (1.6′) 出发，用(1.7)得到它們的函数形状。从几何方面考虑的話，就是作为下列两个曲面

$$\left.\begin{aligned} F(x+ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi\right\},\\ G(x-ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x-ct}\psi(\xi)d\xi\right\} \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

的迭加而得到条件的波动[1]。这里从表面来看因为 x_0 是任意的，所以还有不定性，但这种不定性由于迭加的結果而消失，終于成为 Stokes 波动公式 (1.9)。

---

[1] 再者，因为沿特征曲綫，$x\pm ct$ 为常数而 F, G 不变，所以这些波动曲面表示：在特征曲綫上以具有一定之高的直綫为母綫而圍成的曲面。在 $t=t$ 所截的波动曲面的截口 O′A′B′C′ 可了解为起始在 $t=0$ 的 OABC 的各点沿特征曲綫移动后形成的图象。

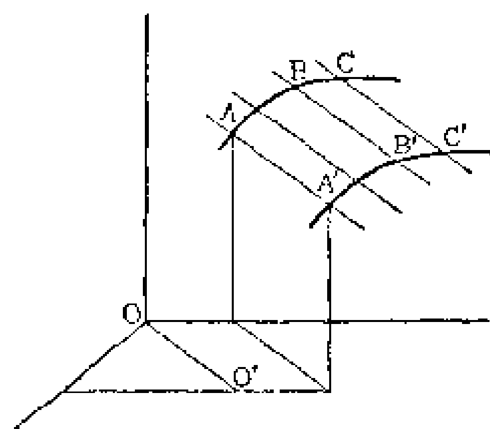


图 4.1

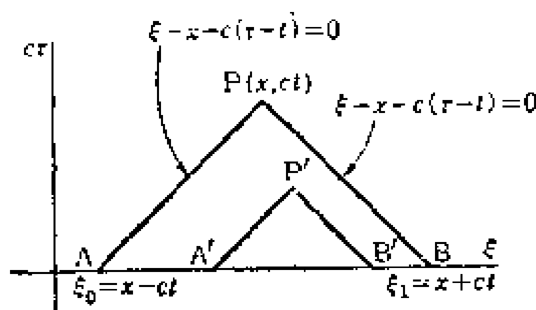


图 4.2

今取以 ξ, $c\tau$ 为两軸的直交坐标，討論一下位置为 $\xi=x$，时刻为 $\tau=t$ 之点 $P(x, ct)$ 的 u 的值(图 4.2)。

通过 P 作二条直綫 PA, PB，分别与两軸之交角为 45°，且与 ξ 軸($\tau=0$)的交点为 A, B. 則 PA, PB 是特征曲綫。因此在它們上面 $\xi-c\tau$, $\xi+c\tau$ 的值不变，而点 A 的 ξ 坐标为 $\xi=x-ct$，点 B 的 ξ 坐标为 $\xi=x+ct$，根据 Stokes 波动公式可知，$u(x, t)$ 的值仅依賴于 u 在初始支柱 $\tau=0$ 的 A 点与 B 点处的初始值 $\varphi(x-ct)$ 与 $\varphi(x+ct)$，以及 $\partial u/\partial t$ 的初始值 $\psi(\xi)$ 在 AB 的区間的积分 $\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi$. 也就是説波动方程的解"$u(x, t)$ 的值仅依賴于通过 P 点的二条特征曲綫与初始支柱所截的部分 AB 上的初始值"。"故此称 AB 为 P 的**依存区域**"。相反地，$t=0$ 上的区間 AB 內給定的始值的影响，将沿着通过两个端点的二条特征綫而扩于 $t>0$ 的区域。因此对于 $t>0$ 形成了(图 4.3 的)愈扩愈广的斜綫区域。普通"称斜綫区域 CABD 为初始区域 AB 的**影响区域**"。

图 4.2 的 △APB 內任意一点 P′ 的波动仅依賴于子区間 A′B′ 上的初始值，A′B′ 既不越出 AB 范围之外，那么"APB 內不論何处的值全能由 AB 上的初始值决定。因此称 △APB 为 AB 的**决定区域**"。对于 △APB 以外的点 P″，仅从 AB 上的初始值是不能唯一确定的(图 4.4)。这是因为 P″ 的 u 值

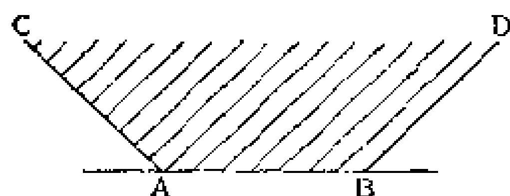


图 4.3

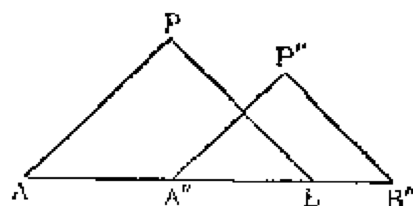


图 4.4

被 A″B″ 上的初始値所决定，一般不但依賴于 A″B 上的初始値而且依賴于 BB″ 上的初始値。今設 AB 上的初始値已經确定，这么在 △APB 的范圍內，积分曲面就完全确定；如果塡补 BB″ 上的初始値而向外扩展积分曲面的話，BB″ 上的値虽有变动，但是在 APB 范圍內的曲面不受影响，也就是說"有多种多样的可能性把积分曲面开拓到决定区域的外部"。換句話說"能以一条特征曲綫 PB 为分界綫得出多种的积分曲面"。

§5 关于双曲型方程初始条件的一般討論

"根据 Cauchy 問題的一般結果，可以不在 $t=0$ 上給初始条件而以任意曲綫 $\overline{C}_0$ (图 5.1) 为初始支柱，只要 $\overline{C}_0$ 与任一条特征曲綫不交于一次以上就够了。这时，可以注意指定 u 及它的一阶偏导数，滿足这种条件的解也是唯一确定的"。在这种一般的情形，偏微分方程的



图 5.1

系数 A, B, C 等可以是 x, y 的函数，特征曲綫也不象波动方程那样是直綫，而一般是二族曲綫。在这种情形，如果标准式能化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \qquad (5.1)$$

的話，則方程的一般解仍是

$$u=F(\xi)+G(\eta). \qquad (5.2)$$

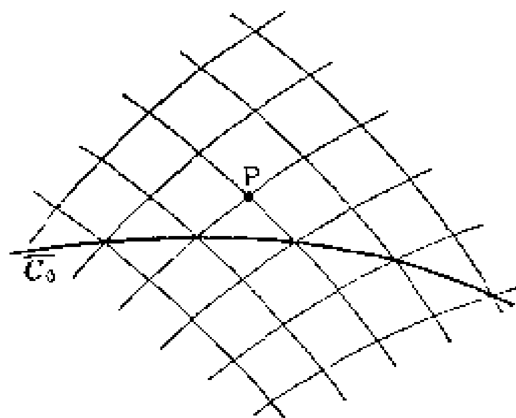


图 5.2

决定积分曲面的問題，按照形式上的說法，与波动方程完全相同。这是因为，$\overline{C}_0$ 在它的任意一点处的方向与特征曲綫的方向是不一致的，如图 5.2。所以如果通过 $\overline{C}_0$ 附近之点，能够作出与 $\overline{C}_0$ 相交的二条特征曲綫[以下称此为情形 1°]，就能对每一点 P 决定通过 P 的 $\xi=$ 常数，$\eta=$ 常数的値，从而 $F(\xi)$, $G(\eta)$ 也就确定了。

但是如图 5.3 的情形，当 $\overline{C}_0$ 和某一条特征曲綫相交二次以

上,并于某点处的方向与特征方向一致时[以下称此为情形2°],如果把 $\overline{C}_0$ 全体作为初始支柱,則Cauchy問題就不能解决了。这时,对于 $\overline{C}_0$ 的一部分TA, $\overline{C}_0$ 的方向是到处同特征方向不一致的,所以三角形PTA就成为TA的决定区域。$\overline{C}_0$ 的另一部分TB的情况一样,三角形PBT为TB的决定区域。从而"一般由两个部分所作的积分曲面沿着特征曲綫PT发生錯綜,而不能获得一个包含初始曲綫的整个的积分曲面"。这个事实也可这样了解:初始支柱的一部分"TB属于其他一部分TA的影响区域,即 $G(\eta)$ 业已由TA上的初始值所决定,因而就不能給出与TA上的值无关的TB上的初始值"。但是"因为通过TA部分和通过TB部分的 ξ 特征曲綫是完全不同的,所以互不影响"。也就是說"$F(\xi)$ 在TB上可任意指定"。

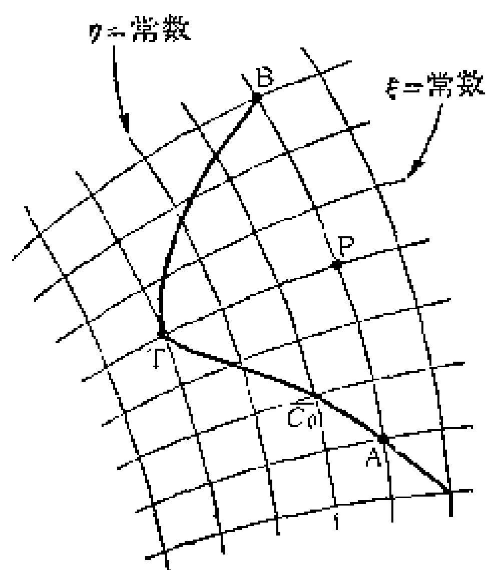


图 5.3

波动方程的初始値問題(1.6)及(1.6′)的解所以能唯一确定的原故,是由于当任意指定二条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\qquad(5.3)$$

时,一般解的两个波动曲面 F, G 的形状可根据(4.5),由 φ, ψ 唯一确定。对于一般双曲型方程(5.1)的Cauchy問題,其情形1°与波动情况完全相似,这时任意給定初始支柱 $\overline{C}_0$ 上的二条件

$$u=u(\sigma),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=N(\sigma)\qquad(5.4)$$

之后,(5.2)的"F, G 就由(5.4)的 u, N 唯一确定"。

然而在 2° 的情形，这时，从初始支柱的一部分 TA 上的初始值，业已决定了另一部分 TB 上的 $G(\eta)$ 的值，所以在 TB 上只剩下"自由給定 $F(\xi)$ 的初始值的可能性"，从而"在 TB 上不可能同时指定 $u(\sigma)$ 与 $N(\sigma)$. 但是可以指定 $u(\sigma)$ 或是 $N(\sigma)$ 中的一个，或是它們的結合

$$N(\sigma)+L(\sigma)u(\sigma)".$$

在 $\overline{C}_0$ 上仅給出 $u(\sigma)$ 的問題称为**第一种边界值問題**或 **Dirichlet 問題**，仅給出 $N(\sigma)$ 的問題称为**第二种边界值問題**或 **Neumann 問題**，給出 $N(\sigma)+L(\sigma)u(\sigma)$ 的問題称为**第三种边界值問題**。对于椭圓型方程，这三种边界条件的每一种，都是重要的数学物理問題的决定条件。可是对于我們現在討論的双曲型方程，重要的倒是稍具特殊性的混合条件問題。

混合問題是把边界条件与作为一般初始条件的 Cauchy 条件同时并提的問題。因为都是在变域的边界上指定条件，所以从广义的含义来說，所有的附加条件都是边界条件，因此在这种条件下解方程的問題无妨泛称为边值問題（定解問題），但是本书为了方便起見仍用上面的說法。

§6 双曲型方程的特征始值問題(或第一問題)

一維波动方程以及与之同型的，即标准形，能够写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

的双曲型方程，一般解总能用

$$u=F(\xi)+G(\eta) \tag{6.1}$$

的形式来表达。因而在物理上具有重要意义的是問題"多少个附加条件就能使积分曲面唯一确定?"也就是說"多少个条件就能唯一确定 F, G?". 从 §5 已知，对于双曲型方程，在初始支柱和特征曲綫相交不超过一次的条件下，便能确定 Cauchy 問題的解的唯一性，如果这个条件不成立，便出現混合問題，另外还有这样的結論："以一条 ξ 特征曲綫及一条 η 特征曲綫的各一部分作

为初始曲綫，并在各特征曲綫上指定了 u 的始值，积分曲面也能唯一确定"。这个問題称为**特征始值問題**。設在被选为初始曲綫的 ξ 特征曲綫上指定了初始值，如

$$\text{在 } \xi=0 \quad \text{上} \quad u=\psi(\eta), \tag{6.2}$$

及在被选为初始曲綫的 η 特征曲綫上指定了初始值，如

$$\text{在 } \eta=0 \quad \text{上} \quad u=\varphi(\xi), \tag{6.3}$$

則能如下地唯一确定二任意函数 F, G。先把(6.2)及(6.3)代入于(6.1)就成为

$$F(0)+G(\eta)=\psi(\eta), \quad F(\xi)+G(0)=\varphi(\xi), \tag{6.4}$$

于是在各特征曲綫 $\xi=$ 常数，$\eta=$ 常数上 $F(\xi)$ 与 $G(\eta)$ 分别是

$$F(\xi)=\varphi(\xi)-G(0), \quad G(\eta)=\psi(\eta)-F(0). \tag{6.5}$$

但是为了积分曲面能唯一确定，指定的始值 $\psi(\eta)$, $\varphi(\xi)$ 在 $\xi=0$ 及 $\eta=0$ 的交点 $(\xi=0, \eta=0)$ 处必須相等，因此必須假設始値适合条件

$$\varphi(0)=\psi(0)=F(0)+G(0). \tag{6.6}$$

把(6.5)代入(6.1)，即得

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta)&=\varphi(\xi)+\psi(\eta)-F(0)-G(0)\\ &=\varphi(\xi)+\psi(\eta)-\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}, \end{aligned}$$

$$\varphi(0)=\psi(0). \tag{6.7}$$

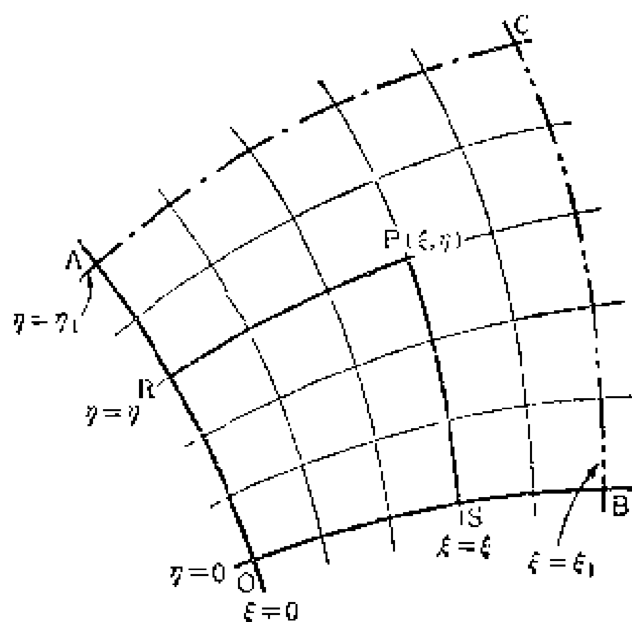


图　6.1

这是特征始值問題的解，从而由初始曲綫上所指定的始值 $\varphi(\xi)$，$\psi(\eta)$，就能唯一确定在点 $P(\xi,\eta)$ 处的 u 的值。

特別是，当在特征曲綫 $\xi=0$ 的一部分 OA 上及在特征曲綫 $\eta=0$ 的一部分 OB 上分別給定了始値之后，对于图6.1中四边形 OACB 内的任意点 $P(\xi,\eta)$ 的 u 的値，也就說，积分曲面的高度可以根据(6.7)利用通过 P 的两条特征曲綫 PR，PS 与初始特征曲綫相交之点 R，S 处的 $\psi(\eta)$ 及

$\varphi(\xi)$来决定。因此，初始曲綫上的"AOB 的决定区域是四边形 AOBC"，从而特别是 AC，BC 上的 u 的值也是全确定的。在下面的章节中我們将要看到对于椭圆型方程，在閉曲綫上給出 u 的边值的第一种边界值問題是唯一可解的。但是对于双曲型方程則不然，在目前的情况若指定四边形两邻边上的值，便能确定对边上的值，因而若要一般地指定在閉曲綫上全部的边界值，就使得条件过多。一般說来，这样的解将不存在。这是双曲型和椭圆型的一个很大的本质的差別。

§7 半无限波动方程的混合問題

在 §4 中已經讲过了无边界的一維波动方程的始值問題的解，以及所得解与始值之間的关系。若把空間的一側限制为有限的，并在边界处要求适合边界条件。作为簡单的例子，設弦占有 $0\leq x<\infty$ 之部分，考虑弦的一端固定于 $x=0$ 处的波动問題。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\leq x<\infty. \tag{7.1}$$

我們要研究(7.1)的一般解

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct), \tag{7.2}$$

若适当地选取了 F，G，除了初始条件

$$\left.\begin{aligned}&u(x,0)=\varphi(x),\\&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\\&0<x<\infty\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

之外，是否还能适合在 $x=0$ 处的边界条件

$$u(0,t)=0. \tag{7.4}$$

按照 Cauchy 問題的一般提法来說明我們的問題的話，乃是决定 (7.1) 的积分曲面使得在初始曲綫 XOY 上适合所指定的条件，并且限定有意义的范圍是 $0<x$，$0<t$。設 $P_1(x,ct)$ 是落在 $x-ct>0$，$t>0$ 的范圍內的点，就是图 7.1 的 x 軸与 ξ 軸之間所限定的区域 I 中的点，这时和沒有边界 $x=0$ 的情况一样，P_1 的依存区域由 A_1B_1 給定，并且与从(1.7)导出(1.8)的方式一样，可以从 A_1B_1 上的初始值获得如下的結果：

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct),\quad x-ct>0,\ x+ct>0, \tag{7.5}$$

这里

$$F(x+ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)],\quad x+ct>0, \tag{7.6}$$

$$G(x-ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)],\quad x-ct>0. \tag{7.6'}$$

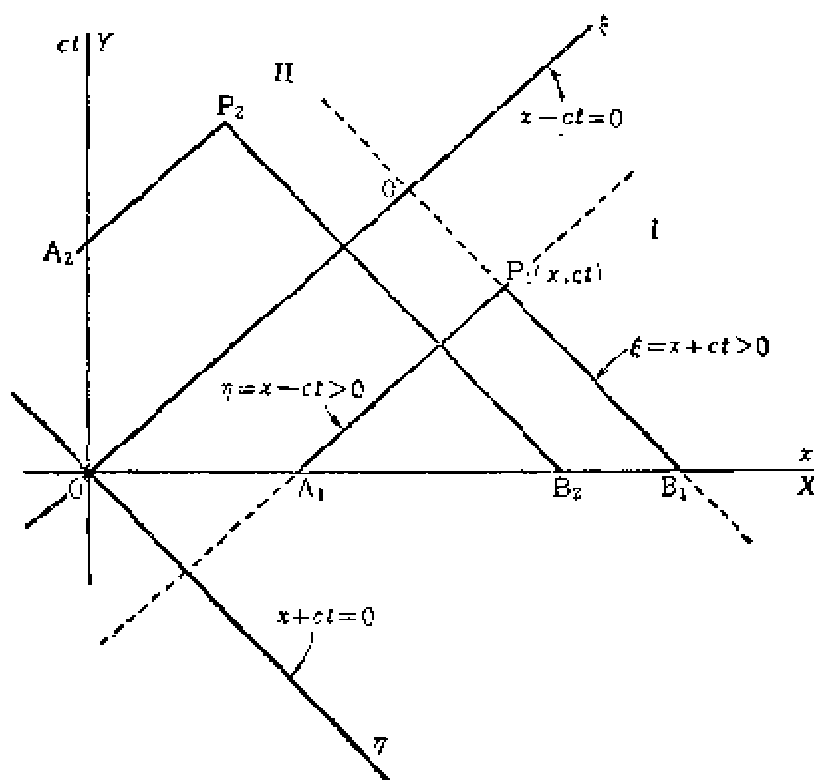


图 7.1

其中 $\Psi(x)$ 意味着积分：

$$\Psi(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi. \tag{7.7}$$

然而，当点 P_2 落在 ξ 轴和 Y 轴所限定的区域 II 内，即 $x+ct>0$, $x-ct<0$ 时，P_2 的依存区域由 A_2OB_2 給定，这就是說

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct),\quad x+ct>0,\ x-ct<0, \tag{7.5a}$$

这里面的函数 F 同上面一样可由 x 軸上的 Cauchy 条件决定，但是，函数 G 則依賴于 t 軸上的，即边界 $x=0$ 上的边界条件 (7.4)，也就是說，在(7.2)設 $x=0$, $t>0$, 从(7.4)得

$$G(-ct)=-F(ct), \tag{7.8}$$

然而就 F 說，对 $x+ct>0$ 可視为(7.6)，因而設 $x=0$ 即得

$$F(ct)=\frac{1}{2}[\varphi(ct)+\Psi(ct)],\quad ct>0, \tag{7.9}$$

从(7.8), (7.9)又得

$$G(-ct)=-\frac{1}{2}[\varphi(ct)+\Psi(ct)],\quad ct>0, \tag{7.10}$$

把(7.10)的 ct 改换为 $ct-x$, 則得

$$\begin{aligned}G(x-ct)&=-\frac{1}{2}[\varphi(ct-x)+\Psi(ct-x)]\\&=-F(ct-x),\quad x-ct<0.\end{aligned} \tag{7.11}$$

总括上述, F 在 I, II 两区域都是

$$F(x+ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)],\quad x+ct>0. \tag{7.12}$$

与此相对, G

在(I)中为

$$G(x-ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)],\quad x-ct>0, \tag{7.13}$$

在(II)中为

$$G(x-ct)=-F(ct-x)=-\frac{1}{2}[\varphi(ct-x)+\Psi(ct-x)],\quad x-ct<0. \tag{7.13'}$$

所以 $u(x,t)$

在(I)中为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)+\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)]\\&=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi,\\&\qquad x+ct>0,\quad x-ct>0,\end{aligned} \tag{7.14}$$

在(II)中为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)-\varphi(ct-x)-\Psi(ct-x)]\\&=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)\}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi,\\&\qquad x+ct>0,\quad x-ct<0.\end{aligned} \tag{7.14'}$$

极为明显,在(7.14′)中,若令 $x=0$, 则边界条件(7.4)成立, 由(7.14)可知初始条件(7.3)也成立。

从物理的意义来說，可以有这样的提法，即称(7.3)为初始条件，(7.4)为边界条件。但是从 Cauchy 問題的观点来看，可把 x 軸及 t 軸合并作为一条曲綫 XOY，并看做初始支柱 $\overline{C}_0$，但是现在如图5.3所示，$\overline{C}_0$ 和 ξ 特征曲綫相交两次，所以属于一般理論中的2°的情形。如果对 $\overline{C}_0$ 的全部給定 Cauchy 条件，就成为条件过剩的問題。于是对 η 特征曲綫，仅在 $\eta=x-ct>0$ 的部分給出了 Cauchy 条件。而对 $\eta=x-ct<0$ 的部分給出了 Dirichlet 条件。这样波动方程的解恰好仍是唯一确定的。

第2章 分离变数法及本征值問題

§8 正交曲綫坐标与分离变数法

从直角坐标 x, y, z，及如下的变换

$$x=x(u_1, u_2, u_3), \quad y=y(u_1, u_2, u_3),$$
$$z=z(u_1, u_2, u_3), \tag{8.1}$$

如果綫元能够写成

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=g_1du_1^2+g_2du_2^2+g_3du_3^2, \tag{8.2}$$

$$g_k=\left(\frac{\partial x}{\partial u_k}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_k}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_k}\right)^2, \quad k=1, 2, 3, \tag{8.3}$$

那末反过来，把(8.1)写成

$$u_1=u_1(x, y, z), \quad u_2=u_2(x, y, z),$$
$$u_3=u_3(x, y, z),$$

則由 u_k=常数，$k=1, 2, 3$ 給了三个曲面族，其中属于不同 k 的族的曲面相互正交，形成所謂正交曲綫坐标。若用正交曲綫坐标表示物理、工程的基本方程中常常出現的偏微分式 grad, div, rot 等，則得

$$\operatorname{grad}\psi=\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}, \frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}, \frac{1}{\sqrt{g_3}}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right), \tag{8.4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{g_1g_2g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\sqrt{g_2g_3}\,v_{u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{g_3g_1}\,v_{u_2})\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{g_1g_2}\,v_{u_3})\right\}, \tag{8.5}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_{u_1}=\frac{1}{\sqrt{g_2g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{g_3}\,v_{u_3})-\frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{g_2}\,v_{u_2})\right\}, \tag{8.6}$$

rot $\boldsymbol{v}$ 的其他分量可由(1, 2, 3)循环出現得出。从(8.4)，(8.5)可得

$$\Delta\psi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g_1g_2g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_2g_3}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_3g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\sqrt{\frac{g_1g_2}{g_3}}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right\}. \tag{8.7}$$

应用数学中最基础的偏微分方程之一，是 **Schrödinger 方程**

$$\Delta\psi+(E-U)\psi=0, \tag{8.8}$$

下面略述把(8.8)用正交曲綫坐标表示时的主要情形以及分离变数的問題。

a) **直角坐标** 对于

$$u_1=x, \quad u_2=y, \quad u_3=z,$$

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{8.9}$$

可以直接了解为 $g_1=g_2=g_3=1$ 的情况，当 $U=U_x(x)+U_y(y)+U_z(z)$ 时(8.8)可用分离变数法求解。就是把

$$\psi=X(x)Y(y)Z(z) \tag{8.10}$$

代入于(8.8)再除以 $X(x)Y(y)Z(z)$，将該式写成

$$\begin{aligned}&X''(x)/X(x)-U_x(x)\\&\quad=-[\{Y''(y)/Y(y)-U_y(y)\}+\{Z''(z)/Z(z)-U_z(z)\}+E],\end{aligned}$$

可見等式的左端仅为 x 的函数，右端仅为 y，z 的函数，因此必然是和 x 无关的，同时也和 y，z 无关的常数。記作 $-E_x$，于是就能推断 X 必适合下列的常微分方程：

$$X''+(E_x-U_x)X=0. \tag{8.11}$$

分离变数时出現的这种常数叫做**分离常数**。同样可得 y，z 的相当的式子。此形式中最簡单的情况是 u_x 为常数，这时令 $E_x-U_x=\lambda$，則成为

$$X''+\lambda X=0. \tag{8.12}$$

对应参数 $\lambda\gtreqless0$ 分别有下列形状的基本解：

$$X=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x},$$

也可說

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x, \ \sin\sqrt{\lambda}\,x, \tag{8.13}$$

或是

$$X=e^{\pm\sqrt{\lambda}x}. \tag{8.13'}$$

b) **柱坐标** 对于正交曲綫坐标，特別是当

$$x=x(u_1, u_2), \quad y=y(u_1, u_2), \quad z=z \tag{8.14}$$

时，則綫元 ds 能写成

$$ds^2=g_1du_1^2+g_2du_2^2+dz^2, \tag{8.15}$$

$$g_1=\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2,\quad g_2=\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2, \tag{8.16}$$

因而可以得出

$$\Delta\psi=\frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right\}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{8.17}$$

特别是，在应用上常用的有**圆柱面坐标，抛物柱面坐标及椭圆柱面坐标**。最普通的直角坐标可以看作角柱面坐标而成柱坐标的特殊情形。

（i）**圆柱面坐标**

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z, \tag{8.18}$$

令 $u_1=\rho$，$u_2=\varphi$，若計算 g_1，g_2 则得 $g_1=1$，$g_2=\rho^2$，

$$\therefore\quad \Delta\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{8.19}$$

特别是当

$$U=U_z(z)+U_\rho(\rho) \tag{8.20}$$

时，(8.8)的解可分离变数为

$$\psi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{8.21}$$

若設分离常数为 m^2，λ，则有

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0, \tag{8.22}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-u_z)Z=0, \tag{8.23}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left\{-\lambda+(E-u_\rho)-\frac{m^2}{\rho^2}\right\}R=0. \tag{8.24}$$

如所周知，(8.22)具有 $e^{\pm im\varphi}$ 或是 $\cos m\varphi$，$\sin m\varphi$ 的解。(8.23) 当 $U_z(z)=z^2$ 时即成 **Weber 方程**，

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-z^2)Z=0, \tag{8.25}$$

将在 §12 中詳細討論。又当 $U_z(z)=\varkappa^2\cos^2 z$ 时成为

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-\varkappa^2\cos^2 z)Z=0, \tag{8.26}$$

即 **Mathieu 方程**。

至于(8.24)，特别重要的是对应于 **Helmholtz 方程**

$$\Delta\psi+k^2\psi=0 \tag{8.27}$$

的情形，即 $U=0$，$E=k^2$，这时(8.24)成为

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\lambda^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0, \tag{8.28}$$

且能化为 Bessel 方程。即設 $\sqrt{k^2-\lambda^2}\,\rho=r$，則能改写成为下列的标准式

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(1-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0. \tag{8.29}$$

定理和問題

(1) 若把三維热傳导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa^2\Delta u$ 的时間項和空間項分离，即令 $u=T(t)v(x, y, z)$，則空間項适合 Helmholtz 方程。

实际上，这样就把拋物型的热傳导方程归結为椭圓型的 Helmholtz 方程。有很多的例子，就是这样把热傳导的問題化为椭圓型方程的边界值問題来处理的。

(2) 当对 Helmholtz 方程 $\Delta v+k^2v=0$ 分离变数时，出現的参数有正有負，因而出現

$$Z_1(z)=\cos\lambda z,\ \sin\lambda z \tag{a}$$

或

$$Z_2(z)=e^{\mu z},\ e^{-\mu z}, \tag{b}$$

对它的矢徑部分，則出現

$$R_1(r)=J_n(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r),\quad N_n(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r) \tag{c}$$

或

$$R_2(r)=J_n(\sqrt{k^2+\mu^2}\,r),\quad N_n(\sqrt{k^2+\mu^2}\,r). \tag{d}$$

（ii）**拋物柱面坐标**

$$x=(\xi^2-\eta^2)/2,\quad y=\xi\eta,\quad z=z, \tag{8.30}$$

令 $u_1=\xi$, $u_2=\eta$，于是

$$g_1=g_2=(\xi^2+\eta^2),\quad g_3=1, \tag{8.31}$$

从而 Schrödinger 方程(8.8)变成

$$\left\{\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}+(E-U)\psi=0. \tag{8.32}$$

当U与z无关，仅为ξ, η的形如

$$U(\xi, \eta)=-2\frac{f(\xi)+g(\eta)}{\xi^2+\eta^2} \tag{8.33}$$

的函数时，能作变数分离，即令

$$\psi(\xi, \eta, z)=Z(z)X(\xi)Y(\eta),$$

于是

$$Z''\pm m^2Z=0, \tag{8.34}$$

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+[\lambda+(E\mp m^2)\xi^2+2f(\xi)]X=0, \tag{8.35}$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+[-\lambda+(E\mp m^2)\eta^2+2g(\eta)]Y=0. \tag{8.35'}$$

对应于 Helmholtz 方程即 $E=k^2$, $f=g=0$, (8.35), (8.35′) 归結为 Weber 方程(8.25)。

(iii) **椭圓柱面坐标**

$$x=c\cosh u\cos v,\quad y=c\sinh u\sin v,\quad z=z, \tag{8.36}$$

設 $u_1=u$, $u_2=v$, 于是

$$g_1(u, v)=g_2(u, v)=c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v),\quad g_3=1. \tag{8.37}$$

因此, Schrödinger 方程(8.8)就成为

$$\frac{1}{c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(E-U_{\rm pot})\psi=0, \tag{8.38}$$

若 $U_{\rm pot}$ 与 z 无关,仅为 u, v 的函数

$$U_{\rm pot}(u, v)=-\frac{f(u)+g(v)}{c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)}, \tag{8.39}$$

就能作变数分离,即令

$$\psi(u, v, z)=U(u)V(v)Z(z), \tag{8.40}$$

于是

$$\frac{d^2Z}{dz^2}\pm mZ^2=0,$$

$$\frac{d^2U}{du^2}+\{-\lambda+cf(u)+(E\mp m^2)c^2\cosh^2 u\}U=0, \tag{8.41}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+\{\lambda+cg(v)-(E\mp m^2)c^2\cos^2 v\}V=0. \tag{8.41'}$$

特别是对 Helmholtz 方程,即当 $E=f=g=0$ 时, (8.41), (8.41′)成为

$$\frac{d^2U}{du^2}+(-\lambda+k^2\cosh^2 u)U=0, \tag{8.42}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+(\lambda+k^2\cos^2 v)V=0, \tag{8.42'}$$

(8.42′)是 Mathieu 方程, 如令 $u\to iv$ 则能将(8.42)归結为与(8.42′)同型的方程。

c) **迴轉坐标** 从直角坐标 x, y, z 令

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z, \tag{8.43}$$

則得柱坐标，再对 ρ, z 而作变换，

$$\rho=\rho(u_1, u_2), \quad z=z(u_1, u_2), \tag{8.44}$$

則得曲綫坐标 (u_1, u_2, φ)，称为**迴轉坐标**。对綫元 ds 有公式

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2=g_1 du_1^2+g_2 du_2^2+g_3 d\varphi^2, \tag{8.45}$$

$$g_1=\left(\frac{\partial\rho}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_2=\left(\frac{\partial\rho}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2, \quad g_3=\rho^2. \tag{8.46}$$

代入(8.7)則 $\Delta\psi$ 变为

$$\Delta\psi\equiv\frac{1}{\rho\sqrt{g_1g_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\rho\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\rho\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right\}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{8.47}$$

由此出发将 Schrödinger 方程对于各种轉动坐标作变数分离，能够得到各种常微分方程。在下面的应用中所遇到的轉动坐标，有球面坐标和轉动抛物面坐标。关于这些将在 §13, §14 及 §15 中分别詳述。至于更一般的問題由于篇幅所限从略。

§9 本征值和本征函数

1) 利用边界条件决定本征值，本征函数 在分离变数的方法中，为解偏微分方程而出现的种种常微分方程，如前面的例子中所見，或在 §12～§15 中所見，都可用形如

$$L[u]\equiv\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u \tag{9.1}$$

的微分算子，統一地写成

$$L[u]+\lambda r(x)u=0 \tag{9.2}$$

的形状，其中“参数 λ 是分离常数。一般說它不是任意的値，是由边界条件或其他条件所决定的”。

“这样从已給条件所决定的参数 λ 的值称为**本征值**”。当 λ 取本征值时，(9.2)的解 u 称为属于本征值 λ 的**本征函数**。

在最簡单的一些問題中，特别地可作一些假定。即自变数 x

的变域是有限区間(a,b)，$-\infty<a\leqslant x\leqslant b<+\infty$，$p(x)$，$q(x)$，$r(x)$都是連續函数，而且 $p(x)>0$，$r(x)>0$.

普通称(9.2)为 **Sturm-Liouville 型方程**，决定其中参数 λ 的本征值的問題称为 **Sturm-Liouville 型本征值問題**。

在前面的假定下，假設給定两端 a，b 处的边界条件为

$$B_a[u]\equiv p(a)u'(a)\sin\alpha-u(a)\cos\alpha=0, \tag{9.3}$$

$$B_b[u]\equiv p(b)u'(b)\sin\beta-u(b)\cos\beta=0. \tag{9.3'}$$

这些条件就是"令边界处函数及其导数之間的某一种綫性关系等于0"，称为**第三种齐次边界条件**。特别"当 $\alpha=0$ 时 $u(a)=0$"是**第一种齐次条件**，"当 $\alpha=\pi/2$ 时 $u'(a)=0$"是**第二种齐次条件**，一般是 $u'(a)-h(a)u(a)=0$，$h(a)=\cos\alpha/\sin\alpha\cdot p(a)$而 $|h(a)|$ 由0变至 ∞.

作为决定本征值的一般方法，如果只考慮(9.3)，那么由于这个点一定是微分方程的尋常点，因此首先在

$$\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha,\quad p(a)\varphi'(a,\lambda)=\cos\alpha \tag{9.4}$$

之初始条件下求(9.2)的解。这时因 λ 是任意的，所以能得到包含参数 λ 的形如 $\varphi(x,\lambda)$的解。然后再求适合初始条件

$$\chi(b,\lambda)=\sin\beta,\quad p(b)\chi'(b,\lambda)=\cos\beta \tag{9.4'}$$

的解 $\chi(x,\lambda)$，这样"分別求出在一个端点处适合条件的(9.1)的解 $\varphi(x,\lambda)$，$\chi(x,\lambda)$"。为了求在两端都适合条件的解"从 φ 及 χ 綫性相关的条件求出 λ 的值。这就是 λ 的本征值。二解 φ，χ 綫性相关的条件是由 φ，χ 的 **Wronski 行列式**为0"这一事实給出的。因此由

$$W[\varphi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)]$$
$$=\varphi(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)-\chi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)=0 \tag{9.5}$$

可求本征値 λ.

例題1　对于

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0, \tag{9.6}$$

从第一种条件

$$u(a,\lambda)=0,\quad u(b,\lambda)=0 \tag{9.7}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)&=\sin\{\sqrt{\lambda}(x-a)\}/\sqrt{\lambda},\\ \chi(x,\lambda)&=\sin\{\sqrt{\lambda}(b-x)\}/\sqrt{\lambda},\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

因此

$$W[\varphi,\chi]=-\sin\{\sqrt{\lambda}(b-a)\}/\sqrt{\lambda}=0, \tag{9.9}$$

而 λ 的本征值是

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{9.10}$$

与此相应的本征函数是

$$\varphi_n(x)=\sin\{n\pi(x-a)/(b-a)\},\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{9.11}$$

若給定的是第二种条件

$$u'(a,\lambda)=0,\quad u'(b,\lambda)=0, \tag{9.12}$$

从

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\{\sqrt{\lambda}(x-a)\},\quad \chi(x,\lambda)=\cos\{\sqrt{\lambda}(x-b)\}, \tag{9.13}$$

$$W[\varphi,\chi]=\sqrt{\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}(b-a)\}=0 \tag{9.14}$$

得出本征値及本征函数，分别是

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{9.15}$$

$$\varphi_n(x)=\cos\{n\pi(x-a)/(b-a)\},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{9.16}$$

这些結果是周知的事实。当然不按照上述的一般方法也能获得同样結果，这里是按照一般方法求出的。

对于同一方程(9.6)，如果不用边界条件(9.7)，(9.12)，而代以**周期性条件**

$$u(a,\lambda)=u(b,\lambda),\quad u'(a,\lambda)=u'(b,\lambda), \tag{9.17}$$

将

$$u(x,\lambda)=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} \tag{9.18}$$

代入(9.17)，則得条件

$$e^{\pm i\sqrt{\lambda}(b-a)}=1.$$

于是得到 λ 的本征値

$$\sqrt{\lambda_n}=2n\pi/(b-a),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{9.19}$$

以及本征函数

$$u_n(x)=e^{\pm i\frac{2n\pi}{b-a}x},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{9.20}$$

或得到与此等价的

$$u_n(x)=\begin{cases}\cos\{2n\pi x/(b-a)\}, & n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\\ \sin\{2n\pi x/(b-a)\}, & n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.\end{cases} \tag{9.21}$$

例題 2

$$L[u]=\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}u+\lambda^2u=0. \tag{9.22}$$ [1]

利用 Bessel 函数 J 与 Neumann 函数 N，可以得到这个方程的基本解

$$u(x)=\sqrt{x}\,J_\nu(\lambda x),\quad \sqrt{x}\,N_\nu(\lambda x). \tag{9.23}$$

試求在 $a\leq x\leq b$ 之两端适合第一种条件

$$u(a)=0,\quad u(b)=0 \tag{9.24}$$

的本征値。仅在一端适合此条件的解 $\varphi(x,\lambda)$，$\chi(x,\lambda)$ 分别是

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda a)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda a)\}, \tag{9.25}$$

$$\chi(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{bx}\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda b)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda b)\}, \tag{9.25'}$$

两解綫性相关的条件是

$$W[\varphi,\chi]=\varphi(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)-\chi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)=0, \tag{9.26}$$

因为

$$\begin{aligned}\varphi'(x,\lambda)=&\frac{\pi}{2}(ax)^{\frac{1}{2}}\{\lambda J_\nu'(\lambda x)N_\nu(\lambda a)-\lambda N_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda a)\}\\ &-\frac{\pi}{4}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda a)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda a)\},\end{aligned} \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned}\chi'(x,\lambda)=&\frac{\pi}{2}(bx)^{\frac{1}{2}}\{\lambda J_\nu'(\lambda x)N_\nu(\lambda b)-\lambda N_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda b)\}\\ &-\frac{\pi}{4}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda b)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda b)\}.\end{aligned} \tag{9.27'}$$

把(9.25)，(9.27)代入于(9.26)，并計算之，得

---

[1] 对于 Bessel 方程 $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)v=0$，作变换 $v=x^{-\frac{1}{2}}u$，即得(9.22)。

$$W[\varphi, \chi]=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(ab)^{\frac{1}{2}}(\lambda x)[\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda a)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda a)\}$$
$$\times\{J_\nu'(\lambda x)N_\nu(\lambda b)-N_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda b)\}$$
$$-\{J_\nu(\lambda x)N_\nu(\lambda b)-N_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda b)\}$$
$$\times\{J_\nu'(\lambda x)N_\nu(\lambda a)-N_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda a)\}]$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(ab)^{\frac{1}{2}}(\lambda x)\{J_\nu'(\lambda x)N_\nu(\lambda x)-N_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda x)\}$$
$$\times\{J_\nu(\lambda b)N_\nu(\lambda a)-N_\nu(\lambda b)J_\nu(\lambda a)\}$$
$$=\frac{\pi}{2}(ab)^{\frac{1}{2}}\{J_\nu(\lambda a)N_\nu(\lambda b)-J_\nu(\lambda b)N_\nu(\lambda a)\}=0,$$

最后一項的化法曾利用了关于圓柱函数的 Lommel 公式

$$J_\nu(z)N_\nu'(z)-N_\nu(z)J_\nu'(z)=\frac{2}{\pi z}.$$

故知所求的 λ 的本征值是超越方程

$$J_\nu(\lambda a)N_\nu(\lambda b)-J_\nu(\lambda b)N_\nu(\lambda a)=0 \tag{9.28}$$

的根。

設(9.28)的根为 λ_l, $l=1, 2, 3, \cdots$, λ_l^2 即是本征值，而

$$\varphi_n(x)=\sqrt{x}\{J_\nu(\lambda_l x)N_\nu(\lambda_l a)-N_\nu(\lambda_l x)J_\nu(\lambda_l a)\} \tag{9.29}$$

是属于它們的本征函数。

【习題 1】

方程：$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$；边界条件：

$$u(0)=0,\quad u'(l)+hu(l)=0. \tag{a}$$

解　对于(9.3)，令 $a=0$, $\alpha=0$, $b=l$, $h=\cot\beta$，則成为边界条件(a)的形状：

$$\varphi(x, \lambda)=\sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda},$$

$$\chi(x, \lambda)=\frac{\sin((b-x)\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta+\cos((b-x)\sqrt{\lambda})\sin\beta,$$

$$W(\varphi, \chi)=\frac{\sin(l\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta+\cos(l\sqrt{\lambda})\sin\beta.$$

由此可知本征值 λ_n 是超越方程

$$\sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}l)=-h \tag{b}$$

的正根($n=1, 2, 3, \cdots$)，本征函数是 $\sin(\sqrt{\lambda_n}x)/\sqrt{\lambda_n}$.

【习题 2】

方程：$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$；边界条件：

$$u'(a)-ku(a)=0, \quad u'(b)+hu(b)=0. \tag{c}$$

解 $k=-\cot\alpha$，$h=\cot\beta$，本征值是超越方程

$$\sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}\,l)=(\lambda_n-hk)/(h+k), \quad l=b-a \tag{d}$$

的正根 $\lambda_n(n=1, 2, 3, \cdots)$，本征函数是

$$\{\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}\,a)-k\sin(\sqrt{\lambda_n}\,a)\}\cos(\sqrt{\lambda_n}\,x)$$
$$+\{\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,a)+k\cos(\sqrt{\lambda_n}\,a)\}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x). \tag{e}$$

对于(d)，令 k, $h\to 0$，则与(9.14)一致，令 $k\to\infty$ 则与(b)一致。

2) **本征函数的各种性质(正交关系)** 上面所求的(9.11)，(9.16)，(9.29)等，虽都是属于不同本征值的本征函数。但是每一种情形都成立着所谓的**正交关系**

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_{n'}(x)\,dx=0 \quad (n\neq n'). \tag{9.30}$$

对于复值函数(9.20)的情形，設 $\bar\varphi$ 为 φ 的共軛复数，于是可用

$$\int_a^b \varphi_n(x)\bar\varphi_{n'}(x)\,dx=0 \quad (n\neq n') \tag{9.31}$$

代替前式，至于一般的 Sturm-Liouville 型的本征值問題，其中 $r(x)=1$ 的本征函数 $\varphi_n(x)$ 成立着把(9.31)一般化了的关系

$$\int_a^b r(x)\,\varphi_n(x)\bar\varphi_{n'}(x)\,dx=0 \quad (n\neq n'). \tag{9.32}$$

因为对于(9.1)的 L，Lagrange 恒等式

$$u(x)L[v(x)]-v(x)L[u(x)]=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\right\} \tag{9.33}$$

成立，若把 $u(x)$ 看作属于本征值 λ_l 的本征函数 $\varphi_l(x)$，把 $v(x)$ 看作属于不同的本征值 λ_k 的本征函数 $\varphi_k(x)$，则成立着关系

$$(\lambda_l-\lambda_k)r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(\varphi_l\frac{d\varphi_k}{dx}-\varphi_k\frac{d\varphi_l}{dx}\right)\right\}.$$

把等式对(a, b)区間积分，并且注意 φ_l，φ_k 在 (a, b) 都适合边界条件(9.3)，于是得到

$$(\lambda_l-\lambda_k)\int_a^b r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)dx=\{p(x)(\varphi_l(x)\varphi_k'(x)-\varphi_k(x)\varphi_l'(x))\}\Big|_a^b=0. \quad (9.34)❶$$

这就是属于不同本征值的本征函数的正交性❷

$$\int_a^b r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)dx=0 \quad (\lambda_l\neq\lambda_k). \quad (9.35)$$

展开定理 当 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 在有限区間(a, b)内滿足前面的假定时❸，則“Sturm-Liouville 型本征值問題存在着可数无穷多个本征值。并且它們所属的本征函数的全体形成关于权函数$r(x)$的完全正交函数系”。对此区間有一族范圍相当广的“函数$f(x)$，可用正交函数表示为下列的形状”

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \quad (9.36)$$

这里的展开系数 c_n 称为 **Fourier 系数**，并由

$$c_n=\frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad n=1, 2, 3, \cdots \quad (9.37)$$

給定，此地

$$(f, \varphi_n)=\int_a^b r(\xi)f(\xi)\bar{\varphi}_n(\xi)d\xi, \quad (9.38)$$

$$(\varphi_n, \varphi_n)=\int_a^b r(\xi)|\varphi_n(\xi)|^2d\xi. \quad (9.39)$$

在假定**一般 Fourier 展开**(9.36)的可能性之下，容易决定 c_n 之值，就是把(9.36)中的 n 改写为 n'，然后对式子的两边乘以 $r(x)\bar{\varphi}_n(x)$，再对于(a, b)积分，利用正交关系(9.32)，右端

❶ 对于一个本征值仅有一个本征函数属于它的情形，本征函数間的正交性是成立的，如果多个本征函数属于同一个本征值时，即所謂**退化**本征值的情况，一般説，它們的个数是有限的，因而能够选定相互正交的本征函数。于是(9.32)一般地也成立。

❷ 这里的本征函数是取为实值的，实际上，在以下的問題中本征函数全能作为实值的形状来处理，然而也有象(9.20)的那样写成复值函数較为便利的情况，包含这种情况在内，如果(9.32)的关系成立，就說本征函数 φ_n, $\varphi_{n'}$ 在区間(a, b)关于权函数$r(x)$正交。

❸ 见§9.1。——譯者注

各項的积分中不成为 0 的仅是 $n=n'$ 的这一項，由此即得 c_n 如(9.37)。

若不用 $\varphi_n(x)$，代之以一定倍数的

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)/\sqrt{(\varphi_n,\ \varphi_n)}, \tag{9.40}$$

則結果为

$$(\psi_n,\ \psi_n)=1. \tag{9.41}$$

这样作称为**正規化**(規范化)。規范正交系适合**規范正交关系**

$$(\psi_n,\ \psi_{n'})=\delta_{n,n'}=\begin{cases}0, & n\neq n',\\ 1, & n=n'.\end{cases} \tag{9.42}$$

按規范正交系 $\psi_n(x)$ 的 Fourier 展开，形如

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x),\quad c_n=(f,\ \psi_n),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{9.43}$$

这时，常用的 $f(x)$ 的条件是 $\int_a^b|f(\xi)|^2d\xi$ 存在[取为 Lebesgue 意义的积分]。对分段光滑函数若依 Riemann 意义理解积分，能得到較为簡单的証明❶。

我們避免深入这种基本事項。应用上时常出現的重要情形，常常不受上述关于变域和系数假定的限制。即或是变域不是有限的(a 或 b 为 ∞)，或是在 $a<x<b$ 內出現 $p(x)=0$，就是所考虑的区間內出現微分方程的奇点。一般說，問題之解在这种区間內将失却有界性，出現所謂**奇性边界条件**。包括这种情况在內，把本征値問題最一般地解决了的是小平的工作，本丛书在有关本征値或其他問題中会討論这个問題❷。

§10 Sturm-Liouville 型方程的本征値与本征函数，Fourier 展开式

我們在表 10.1 中罗列了 Sturm-Liouville 型微分方程

---

❶ 例如，吉田耕作：微分方程的解法(日文，岩波书店，97 頁)。

❷ 吉田耕作：积分方程論(日文，岩波书店)，161 頁以下有較好的初等化了的說明。又如 Coddington-Levinson 的教科书亦詳。

表 10.1

方　程	基本区域	边界条件	本征値 λ_n	规范正交系 $\psi_n(x)=\sqrt{r(x)}\varphi_n(x)$
$p(x)=1,\ q(x)=0,\ r(x)=1$ $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$	$(-l, l)$	周期性条件 $u(-l)=u(l)$ $u'(-l)=u'(l)$	$(n\pi/l)^2$ $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\frac{n\pi x}{l}}$　(10.1′)
	$(0, l)$	两端固定 $u(0)=u(l)=0$	$(n\pi/l)^2$ $n=1, 2, 3, \cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$　(10.1″)
	$(0, l)$	两端自由 $u'(0)=u'(l)=0$	$(n\pi/l)^2$ $n=0, 1, 2, \cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$　(10.1‴)
Legendre 微分方程 $p(x)=(1-x^2)$ $q(x)=0,\ r(x)=1$ $\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)+\lambda u=0$ 奇点 $x=\pm 1$	$(-1, 1)$	奇性边界条件 $u(\pm 1)$有界 而且 $\lVert u\rVert=(u, u)^{\frac{1}{2}}$ 存在	$n(n+1)$ $n=0, 1, 2, \cdots$	$\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}\,P_n(x)$　(10.2)
Legendre 伴随微分方程 $p(x)=(1-x^2)$ $q(x)=-\dfrac{m^2}{1-x^2},\ r(x)=1$ $\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)u=0$ 奇点 $x=\pm 1$	$(-1, 1)$	$u(\pm 1)$：有界 而且 $\lVert u\rVert$ 存在	$n(n+1)$ $n=0, 1, 2, \cdots$	$\sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(x)$　(10.2′)

續表

方 程	基本区域	边 界 条 件	本 征 值 λ_n	规范正交系 $\psi_n(x)=\sqrt{r(x)}\varphi_n(x)$
Bessel 微分方程 $p(x)=x,\quad q(x)=-\dfrac{\nu^2}{x}$ $r(x)=x$ $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right)+\left(\lambda^2 x-\dfrac{\nu^2}{x}\right)u=0$ ❶ 奇点 $x=0$	$(0, a)$	$u(0)$: 有界 $u(a)=0$	$\lambda=\lambda_l$: $\lambda_l^{-\nu}J_\nu(\lambda_l)=0$ $l=1, 2, 3, \cdots$	$\dfrac{\sqrt{2x}}{aJ_{\nu-1}(\lambda_l)}J_\nu\left(\lambda_l\dfrac{x}{a}\right)$ (10.3)
	$(0, a)$	$u(0)$: 有界 $u'(a)+hu(a)=0$	$\lambda=\mu_l$: $\mu^{-\nu}\{\mu_l J_{\nu}'(\mu_l)$ $+hJ_\nu(\mu_l)\}=0$ $l=1, 2, 3, \cdots$	$\dfrac{\mu_l}{a\sqrt{\mu_l^2+h^2-\nu^2}}\dfrac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\mu_l\dfrac{x}{a}\right)}{J_\nu(\mu_l)}$ (10.3′)
	$(0, a)$	$u(0)$: 有界 $u'(a)=0$	$\lambda=\varkappa_l$: $\varkappa_l^{1-\nu}J_\nu'(\varkappa_l)=0$	$\dfrac{\varkappa_l}{a\sqrt{\varkappa_l^2-\nu^2}}\dfrac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\varkappa_l\dfrac{x}{a}\right)}{J_\nu(\varkappa_l)}$ (10.3″)
Weber-Hermite 微分方程 $p(x)=e^{-x^2},\quad q(x)=e^{-x^2}$ $r(x)=e^{-x^2}$ $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{du}{dx}\right)-e^{-x^2}u+\lambda e^{-x^2}u=0$	$(-\infty, \infty)$	$\|u\|$: 存在	$2n+1$ $n=0, 1, 2, \cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ (10.4)
Laguerre 伴随微分方程 $p(x)=e^{-x}x^{m+1},\quad q(x)=me^{-x}x^m$ $r(x)=e^{-x}x^m$ $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}x^{m+1}\dfrac{du}{dx}\right)-me^{-x}x^m u$ $+\lambda e^{-x}x^m u=0$	$(0, \infty)$	$\|u\|$: 存在	n	$\sqrt{\dfrac{(n-m)!}{(n!)^3}}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{m}{2}}L_n^m(x)$ (10.5)

❶ 为方便起见,在 Bessel 的場合,把标准式(10.1)中的 λ 改写为 λ^2.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u+\lambda r(x)u=0 \tag{10.1}$$

在应用中最常出现的特殊方程，具有代表性的边界条件，对应于这些条件的本征值，以及相应的形成规范正交系的本征函数。

表中所见的 $\varphi_n(x)$ 是关于权函数 $r(x)$ 的规范正交系

$$(\varphi_n,\ \varphi_{n'})=0,\quad n\neq n',$$

$$(\varphi_n,\ \varphi_n)=\int_a^b r(\xi)|\varphi_n(\xi)|^2 d\xi=1,$$

$f(x)$ 的 Fourier 展开则由

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)(f,\ \varphi_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\int_a^b r(\xi)f(\xi)\bar{\varphi}_n(\xi)d\xi \tag{10.6}$$

给出，两端乘以 $\sqrt{r(x)}$，再令 $\sqrt{r(x)}f(x)=F(x)$，对于 $\sqrt{r(x)}\varphi_n(x)=\psi_n(x)$ 就能简单地得到

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\int_a^b F(\xi)\bar{\psi}_n(\xi)d\xi. \tag{10.6a}$$

表10.1的 $\psi_n(x)$ 都是这样定义的。它们（关于权函数1）形成规范正交系：

$$\int_a^b \psi_n(\xi)\bar{\psi}_{n'}(\xi)\,d\xi=\delta_{n,n'}. \tag{10.7}$$

例如对(10.2)有

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}P_n(\xi)P_{n'}(\xi)d\xi=\delta_{n,n'}, \tag{10.8}$$

对(10.3)有

$$\frac{2}{a^2}\cdot\frac{1}{\{J_{\nu+1}(\lambda_l)\}^2}\int_0^a \xi J_\nu\left(\lambda_l\frac{\xi}{a}\right)J_\nu\left(\lambda_{l'}\frac{\xi}{a}\right)d\xi=\delta_{l,l'}, \tag{10.9}$$

对(10.3′)有

$$\frac{2}{a^2}\,\frac{\mu_l^2}{(\mu_l^2+h^2-\nu^2)\{J_\nu(\mu_l)\}^2}\int_0^a \xi J_\nu\left(\lambda_l\frac{\xi}{a}\right)J_\nu\left(\lambda_{l'}\frac{\xi}{a}\right)d\xi=\delta_{l,l'} \tag{10.10}$$

等。

关于 Fourier 展开，例如对应 (10.3) 的 **Fourier-Bessel** 展开，由(10.6a)可知为

$$F(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\lambda_l\frac{x}{a}\right)}{aJ_{\nu+1}(\lambda_l)}\int_0^a F(\xi)\frac{\sqrt{2\xi}J_\nu\left(\lambda_l\frac{\xi}{a}\right)}{aJ_{\nu+1}(\lambda_l)}d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant a. \tag{10.11}$$

与此相应，由(10.6)可得包括 $r(x)=x$ 的常见形式

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2J_\nu\left(\lambda_l\frac{x}{a}\right)}{a^2\{J_{\nu+1}(\lambda_l)\}^2}\int_0^a\xi f(\xi)J_\nu\left(\lambda_l\frac{\xi}{a}\right)d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant a.\quad(10.12)$$

【习题 1】

从(10.1′)推导实值形式的规范正交系：

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

变形之后，試求普通形式的 Fourier 級数的公式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$$

$$(-l\leqslant x\leqslant l),\quad \lambda=(n\pi/l)^2,$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i\frac{n\pi\xi}{l}}d\xi,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.$$

【习题 2】

导出规范正交关系

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_{n'}(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{n,n'},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_{n'}(x)dx=2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{n,n'},$$

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^m L_n^m(x)L_{n'}^m(x)dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}\delta_{n,n'}.$$

利用关于 Legendre, Hermite, Laguerre 各种函数的 Rodrigues 公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

$$L_n^m(x)=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}e^x x^{-m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x}x^n).$$

关于这样规范正交函数系 $\psi_n(x)$，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_n)\psi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(\xi)\overline{\psi}_n(\xi)d\xi\cdot\psi_n(x),\quad(10.13)$$

当积分与总和的顺序可互换时

$$f(x)=\int_a^b f(\xi)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi)\right\}d\xi, \tag{10.14}$$

利用在§10, 1)中所述的δ函数的表現法，就可获得关系

$$f(x)=\int_a^b f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi. \tag{10.15}$$

比較两式，即得

$$\delta(x-\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi). \tag{10.16}$$

此式右端的級数不收斂，所以严格地說这展开式是毫无意义的，但是由于将等式的两端乘以$f(\xi)$，再积分之就得到$f(x)$．在第3章的应用中将要見到，这样形式的写法是很方便的。

以下計算中要使用δ函数，如用(10.1)～(10.3″)中的$\psi_n(x)$作用它的表达式，則有如下的形式

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{n\pi}{l}(x-\xi)},\quad -l<{x \atop \xi}<l, \tag{10.17}$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l},\quad 0<{x \atop \xi}<l, \tag{10.17'}$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l},\quad 0<{x \atop \xi}<l, \tag{10.17''}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)P_n(\xi),\quad -1<{x \atop \xi}<1, \tag{10.18}$$

$$=\frac{2\sqrt{x\xi}}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\lambda_l\frac{x}{a}\right)J_\nu\left(\lambda_l\frac{\xi}{a}\right)}{\{J_{\nu+1}(\lambda_l)\}^2},$$

$$J(\lambda_l)=0,\quad 0<{x \atop \xi}<a, \tag{10.19}$$

$$=\frac{2\varkappa_l^2\sqrt{x\xi}}{a^2(\varkappa_l^2-\nu^2)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\varkappa_l\frac{x}{a}\right)J_\nu\left(\varkappa_l\frac{\xi}{a}\right)}{\{J_\nu(\varkappa_l)\}^2},$$

$$J_\nu'(\varkappa_l)=0,\quad 0<{x \atop \xi}<a. \tag{10.19'}$$

§11　作为 Fourier 展开及 Fourier-Bessel 展开之极限的 Fourier 积分及 Fourier-Bessel 积分

$e^{i\frac{n\pi x}{a}}$对于区間$(-a, a)$，当n遍取整数无遗时，則形成关于基本区間

$(-a, a)$的完全正交系，而且成立复值 Fourier 展开：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi x}{a}}, \quad C_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(\xi) e^{-i\frac{n\pi\xi}{a}} d\xi. \qquad (11.1)$$

若把边界$(-a, a)$推广到$(-\infty, \infty)$，在$(-\infty, \infty)$所定义的函数$f(x)$就能借助积分代替级数表示为形如

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} d\xi, \quad -\infty<x<\infty \qquad (11.2)$$

的二重积分。这就是 **Fourier 积分定理**。严密的証明则有些繁琐，现在略談一下从(11.1)导出(11.2)的思考上的綫索。令

$$\frac{n\pi}{a}=k_n,$$

由于$\Delta k_n=k_{n+1}-k_n=\pi/a$，所以就能将 Fourier 系数$C_n$写成

$$C_n=\frac{\Delta k_n}{2\pi}\int_{-a}^{a} f(\xi) e^{-ik_n\xi} d\xi,$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{a}x}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_nx}\Delta k_n\int_{-a}^{a} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \qquad (11.3)$$

随同$a\to\infty$而$\Delta k_n\to 0$，k_n几乎是連續地变化。这么就說明了从关于n的总和轉变到(11.2)的积分形式的过程。

通过同样的取极限的方法，可以从(10.17)导出δ的积分表达式

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk, \quad -\infty<x, \xi<\infty. \qquad (11.4)$$

就是先把 Fourier 积分公式(11.2)的积分顺序作形式上的調换，得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk,$$

然后再与

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi) d\xi$$

比較就能得到这个关系式。

若不用复值表达的 Fourier 积分(11.2)，而代以实值的表达式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \int_{0}^{\infty} f(\xi)\cos k(x-\xi) d\xi, \quad -\infty<x<\infty, \qquad (11.2a)$$

则得

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos k(x-\xi) dk, \quad -\infty<x, \xi<\infty. \qquad (11.5)$$

又从对于 $0<x$ 成立的

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kx\,dk\int_0^\infty f(\xi)\cos k\xi\,d\xi,\quad 0<x<\infty, \tag{11.2b}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx\,dk\int_0^\infty f(\xi)\sin k\xi\,d\xi,\quad 0<x<\infty \tag{11.2c}$$

能够得到

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kx\cos k\xi\,dk,\quad 0<x,\ \xi<\infty, \tag{11.6}$$

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx\sin k\xi\,dk,\quad 0<x,\ \xi<\infty. \tag{11.6'}$$

这些在以下的应用中都是常用的公式。

仿照在 Fourier 展开对区間 $(-a,a)$ 取极限 $a\to\infty$ 而求出 Fourier 积分的方法，就能发見如何从 Fourier-Bessel 展开导出下列的积分定理，即所謂 **Fourier-Bessel 积分公式**

$$f(x)=\int_0^\infty kJ_\nu(kx)dk\int_0^\infty \xi f(\xi)J_\nu(k\xi)d\xi. \tag{11.7}$$

对于 Fourier-Bessel 展开(10.12)，令

$$\lambda_l/a=k_l, \tag{11.8}$$

从而得

$$\Delta k_l=k_{l+1}-k_l=(\lambda_{l+1}-\lambda_l)/a,\quad a\to\infty,$$

因为要考虑 $a\to\infty$ 的情形，因此可以用 Bessel 函数的渐近展开

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{11.9}$$

的零点

$$\lambda_l=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \tag{11.10}$$

代替式中的 λ_l，这么就有近似公式

$$\Delta k_l\approx(\pi/a), \tag{11.11}$$

$$J_{\nu+1}(\lambda_l)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_l}}\cos\left(\lambda_l-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi k_l a}}. \tag{11.12}$$

另外从这些关系及(10.12)可知 Bessel 系数 C_n 是

$$C_n=\pi\frac{k_l}{a}\int_0^a \xi f(\xi)J_\nu(k_l\xi)d\xi=k_l\Delta k_l\int_0^a \xi f(\xi)J_\nu(k_l\xi)d\xi.$$

因此，对(10.12)取极限 $a\to\infty$ 的結果就成为

$$f(x)=\sum_{l=1}^\infty k_lJ_\nu(k_lx)\Delta k_l\int_0^\infty \xi f(\xi)J_\nu(k_l\xi)d\xi,$$

再使 $\Delta k_l \to 0$，这就表明(11.7)成立。

同样对(10.19)取极限，则表明成立着形如

$$\delta(x-\xi)=\sqrt{x\xi}\int_0^\infty kJ_\nu(kx)J_\nu(k\xi)dk, \quad 0<x,\ \xi<\infty \tag{11.13}$$

的积分表达式。

或者把 Fourier-Bessel 积分(11.7)变形为

$$f(x)=\int_0^\infty d\xi\int_0^\infty k\xi f(\xi)J_\nu(kx)J_\nu(k\xi)\,dk,$$

如再考虑

$$\delta(x-\xi)=\sqrt{\frac{x}{\xi}}\,\delta(x-\xi),$$

仍能得到(11.13)。

§12 量子力学上的諧和振子，Weber-Hermite 函数

在量子力学中如写出关于諧和振子的 Schrödinger 方程即能导致 Weber 方程(8.25)。适当整理一下就能写成

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}&+(\lambda-\xi^2)\psi\\ &=\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi,\lambda)+(\lambda-1)\psi(\xi,\lambda)\\ &=\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\psi(\xi,\lambda)+(\lambda+1)\psi(\xi,\lambda)\\ &=0\end{aligned} \tag{12.1}$$

的形状。这里的微分算子

$$\overset{(\lambda)}{T}=\frac{d}{d\xi}-\xi, \qquad \underset{(\lambda)}{T}=\frac{d}{d\xi}+\xi \tag{12.2}$$

具有这么样的性质："若使之作用于(12.1)对应参数 λ 的解 $\psi(\xi,\lambda)$，则能轉变成同一 Weber 方程对应于参数 $\lambda\pm2$ 的解"，即

$$\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda)\subset\psi(\xi,\lambda+2), \tag{12.3}$$

$$\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda)\subset\psi(\xi,\lambda-2). \tag{12.3'}$$

因此称(12.2)的 $\overset{(\lambda)}{T}$ 为 λ 的**升算子**，$\underset{(\lambda)}{T}$ 为 λ 的**降算子**。

借助算子 $\overset{(\lambda)}{T}$, $\underset{(\lambda)}{T}$, (12.1)能写成

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda)+(\lambda-1)\psi(\xi, \lambda)=0, \tag{12.4}$$

$$\underset{(\lambda)}{T}\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda)+(\lambda+1)\psi(\xi, \lambda)=0, \tag{12.4'}$$

于是，使 $\overset{(\lambda)}{T}$ 作用于(12.4′)即得

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}(\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda))+(\lambda+1)(\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda))=0.$$

另一面，在(12.4)中置 $\lambda\to\lambda+2$，则成

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda+2)+(\lambda+1)\psi(\xi, \lambda+2)=0.$$

这表明 $\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi, \lambda)$ 及 $\psi(\xi, \lambda+2)$ 适合同一微分方程。在这种意义下就証实了(12.3)的性质，完全同样可以証实(12.3′)。

就(12.1)的形状来看，Weber 方程对特殊的 λ 值，可以簡单的求解。如設 $\lambda=1$，则(12.1)成为

$$\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi, 1)=0, \tag{12.5}$$

显然若 $\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi, 1)=0$，则方程成立，然后解之得

$$\frac{d\psi(\xi, 1)}{\psi(\xi, 1)}+\xi\,d\xi=0,$$

即得

$$\psi(\xi, 1)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \tag{12.6}$$

这么，再用升算子 $\overset{(\lambda)}{T}$ 作用于(12.6)，就能依次求得对于 $\lambda=3, 5, \cdots, (2n+1), \cdots$ 的解，因为用常数乘升降算子，算子的性质保持不变，所以

$$\psi(\xi, 3)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi, 1)=2\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\psi(\xi, 5)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi, 3)=\{(2\xi)^2-2\}e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\psi(\xi, 2n+1)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi, 2n-1)$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{r!}(2\xi)^{n-2r}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\tag{12.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

由此可見，这是形式为 $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ 乘以多項式的解，至于多項式的形状問題将在(12.23)以后詳述。

量子力学要求"这些式子在全区間 $-\infty<\xi<\infty$ ❶ 有界而且平方可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\xi)|^2 d\xi$ 存在"；滿足这种要求的是"所謂奇性边界条件的本征函数"，这种情况出現于上面的参数 λ 为奇数

$$\lambda=2n+1,\quad n=0, 1, 2, \cdots\tag{12.8}$$

的情形，"(12.8)是奇性边界条件的 λ 的本征值"。然而下面将要看到，λ 的本征值仅限于(12.8)，从而本征函数仅限于(12.7)的形式。

参照(12.7)的結果，对于 Weber 方程作变换

$$\psi(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}H(\xi).\tag{12.9}$$

于是 H 必然适合微分方程

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH}{d\xi}+(\lambda-1)H=0 ❷.\tag{12.10}$$

(12.10) 称为 **Hermite 方程**，(12.10)的 $\xi=0$ 是方程的正則点，因之它的解在 $\xi=0$ 的附近必能表为整級数

$$H(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^k\tag{12.11}$$

的形状，形式求导

---

❶ Weber 方程 (12.1) 的系数在有限处虽然沒有奇点，但是因为变域已扩充到 $(-\infty, \infty)$，所以不能象(9.3)那样，在确定边界条件之下进行討論。

❷ 把(12.10)写成自伴随型方程，即成(10.4)的形状

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dH}{dx}\right)-e^{-x^2}H+\lambda e^{-x^2}H=0.$$

$$H'(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}ka_k\xi^{k-1},\quad H''(\xi)=\sum_{n=2}^{\infty}k(k-1)a_k\xi^{k-2}$$

后，并代入于(12.10)即有

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k\xi^{\rho+k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1-\lambda)a_k\xi^{\rho+k}=0,$$

对第一总和改写成 $k\to k+2$，則有

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)a_{k+2}-(2k+1-\lambda)a_k\}\xi^{\rho+k}=0,$$

由此可知，級数(12.11)的系数間必然成立如下的**递推公式**

$$a_{k+2}=\frac{(2k+1-\lambda)}{(k+2)(k+1)}a_k\quad(k=0,1,2,\cdots).\qquad(12.12)$$

"对于上面所求到的 λ 的本征值(12.8)，当 $k=n$ 时，上式的右端为0，即系数 a_{n+2} 为 0"，从此以后，借助关系(12.12)可知，所有編号提高二次的系数都等于0，即对于

$$k=n+2,\quad n+4,\quad\cdots\quad 全部\ a_{k+2}=0,$$

于是級数(12.11)終止于 ξ^n，就是成为 n 次多項式。故此从級数解的結果也能再次証实上述的(12.8)是本征値。

对于 $\lambda\neq 2n+1$ 的情况，級数不能終止于有限。当 k 充分增大时，可得漸近关系

$$a_{k+2}/a_k\sim\frac{2}{k}.\qquad(12.13)$$

因而級数(12.11)和一般項为 $\xi^{2k}/k!$ 的級数，也就是和 e^{ξ^2}(或者于此乘以 ξ 的某一乘冪而得的)，具有相同的收斂性。这就是說，$H(\xi)$对于$|\xi|\gg 1$，在漸近的程度上，具有 $e^{\xi^2}\xi^n$ 的形狀。对此乘以 $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ 后，从(12.9)可得

$$\psi(\xi)\sim e^{\frac{\xi^2}{2}}\xi^n.\qquad(12.14)$$

就是說 $\psi(\xi)$ 随同 $|\xi|\gg 1$，漸近的程度如指数函数地发散，于是可以說，它不能成为奇性边界条件的本征函数。

为了进一步考察 Hermite 函数在 $\xi\to\infty$ 的状态，則需要知道 Hermite 方程在原点附近的級数解(12.11)和在无限远点附近的解之間的**变換关系**。

从研究合流超几何方程

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{du}{dx}-\alpha u=0 \tag{12.15}$$

的解的性质入手，是了解 Weber，Hermite 函数上述性质的最容易的方法。我們知道，(12.15)的原点 $x=0$ 是所謂正則奇点，所以至少存在一个形如

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{\rho+k}$$

的解，其中的一个用合流超几何級数 $F(\alpha;\gamma;z)$ 可以写成

$$u_{1,0}(x)=F(\alpha;\gamma;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma+k-1)}x^k. \tag{12.16}$$

与此无关的解因参数 α，γ 所取值的不同就产生种种的情况，其中最簡单的是 $\gamma\neq$ 整数的时候的解，利用 F 可以写成

$$u_{2,0}(x)=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma;\ 2-\gamma;\ x). \tag{12.17}$$

若对(12.15)作自变数变換

$$x=\xi^2, \tag{12.18}$$

則得

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left\{\frac{2\gamma-1}{\xi}-2\xi\right\}\frac{du}{d\xi}-4\alpha u=0. \tag{12.19}$$

Hermite 方程(12.10)是在(12.19)中令

$$\gamma=1/2,\quad \alpha=(1-\lambda)/4 \tag{12.20}$$

的特殊情况，因此就能借助合流超几何函数将 Hermite 方程的基本解写成

$$\left.\begin{aligned}H^{(1)}(\xi)&=F\left(\frac{1-\lambda}{4};\ \frac{1}{2};\ \xi^2\right),\\ H^{(2)}(\xi)&=\xi F\left(\frac{1-\lambda}{4}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \xi^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{12.21}$$

或設

$$\lambda=2\nu+1, \tag{12.22}$$

即得

$$\left.\begin{aligned}H^{(1)}(\xi)&=F\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ \xi^2\right),\\ H^{(2)}(\xi)&=\xi F\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \xi^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{12.23}$$

特别对于(12.22)当 $\nu=n$ 为正整数时，(12.23)应該給出多項式的解。但实际考虑这种情形的話，当 $\nu=n$ 为偶数时，由于 $-n/2$ 成为負整数，所以 $H^{(1)}$ 的分子終止于第 $n/2$ 項

$$F\left(-\frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ \xi^2\right)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(-\frac{n}{2}+k-1\right)}{k!\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)}\xi^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!}{(2k)!\left(\frac{n}{2}-k\right)!}(2\xi)^{2k}, \tag{12.24}$$

作置换 $n/2-k=r$，并按降冪排列，则得

$$=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-r}\left(\frac{n}{2}\right)!}{(n-2r)!\,r!}(2\xi)^{n-2r}.$$

然后以常数 $(-1)^{n/2}n!/(n/2)!$ 乘之，得

$$H_n(\xi)=(-1)^{n/2}\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}F\left(-\frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ \xi^2\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r}, \tag{12.25}$$

这就是所謂 Hermite 多項式。

当 $\nu=n$ 为奇数时，相反地 $H_2(\xi)$ 的分子終止于有限項

$$\xi F\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \xi^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^k\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,(2\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!\left(\frac{n-1}{2}-k\right)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-r}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,(2\xi)^{n-2r}}{(n-2r)!\,r!}, \tag{12.26}$$

然后以常数 $2(-1)^{\frac{n-1}{2}}n!\Big/\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ 乘之，得

$$H_n(\xi)=2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\xi F\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \xi^2\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r}. \tag{12.27}$$

Hermite 多項式可分为 n 为奇数及偶数的两种情况，概括地可以表成

$$H_n(\xi)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r}. \qquad (12.28)$$

这里$\left[\frac{n}{2}\right]$当 n 为偶数时即为 $\frac{n}{2}$ 自身，n 为奇数时则表示小于該数的最大的整数 $\frac{n-1}{2}$.

以上是把直接从 Weber, Hermite 方程所得的結果作为合流超几何方程的特款論述，现在再討論它們之間的变换关系。

对于 $\lambda=2n+1$ 以外的情况，$H^{(1)}(\xi)$，$H^{(2)}(\xi)$ 都不能成为有限級数。因而有檢查这些函数在$|\xi|\gg 1$ 的状态之必要。若 $\xi=\infty$ 至少是方程(12.10)的正则奇点，寻求在其附近收斂的基本解，然后把在 $\xi=0$ 附近求得的基本解表为在 $\xi=\infty$ 附近的基本解的綫性組合，再决定其系数就行了，然而目前，"$\xi=\infty$ 是(12.19)的不正則奇点，不能得到在其附近收斂的級数解，因此只得滿足于借助**漸近展开**探索其漸近性质"。

合流超几何方程(12.19)在不正則奇点 $x=\infty$ 附近的漸近解的 0 次近似，是由

$$u_{1,\infty}(x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-x)^{-\alpha}, \qquad (12.29)$$

$$u_{2,\infty}(x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^x x^{\alpha-\gamma} \qquad (12.29')$$

給出的❶。

至于 $\xi=0$ 附近的解，基本解 $H^{(1)}(\xi)$，$H^{2}(\xi)$已在(12.21)中用合流超几何函数 $F(\alpha;\gamma;x)$表示过。

显然 $F(\alpha;\gamma;x)$能表为上列 $u_{1,\infty}(x)$，$u_{2,\infty}(x)$之和的形状，从

---

❶ 例如福原滿洲雄著：常微分方程的解法(綫性之部)，岩波版，87 頁；又如本书著者著：球函数，圆柱函数，超几何函数(河出版)，375 頁。——以上皆日文

而可知，对于 $F(\alpha;\gamma;x)$ 的渐近展开式，其第0次近似❶是

$$F(\alpha;\gamma;x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-x)^{-\alpha}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{x}x^{\alpha-\gamma}. \quad (12.30)$$

把这个式子代入于(12.21)，显見不論 $H^{(1)}(\xi)$ 或是 $H^{(2)}(\xi)$ 必将全都具有 $e^{\xi^2}\xi^{\frac{1-\lambda}{2}-1}=e^{\xi^2}\xi^{-\nu-1}$ 之項，从而"Weber 方程的解只要不是 $\nu=n$，必然渐近于

$$\psi(\xi)\sim e^{\frac{\xi^2}{2}}\xi^{-\nu-1}$$

并在无限远处发散"。这就同在(12.14)所述的結果一致。由此可見，"对(12.22)以外的参数值并不存在本征值，从而本征函数亦仅限于上面所求到的"。

§13 量子力学上的 Kepler 問題的本征值問題之一 輻角部分

当方程

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+(E-U)\psi=0 \quad (13.1)$$

的势 U 仅是动点与某一定点的距离 r 的函数时，从空間的对称性考虑，最自然是使用球面坐标来表示。因而結果可以写成

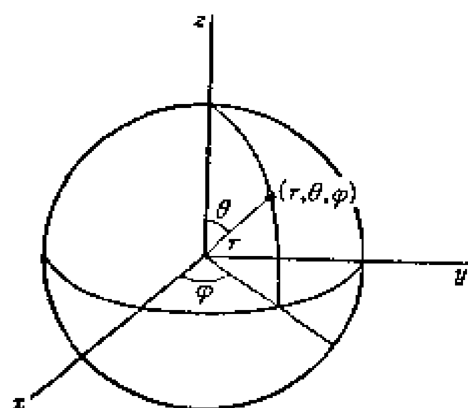


图 13.1

$$\Delta\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \quad (13.2)$$

---

❶ 設 $F(\alpha;\gamma;x)$ 的 x^k 的系数为 a_k，同(12.13)一样 $a_k/a_{k-1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{(\gamma+k-1)}{(\alpha+k-1)}\sim\frac{1}{k}$，因为这与 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 相应項之比 $a_k/a_{k-1}=\frac{1}{k}$ 一致，所以 $F(\alpha;\gamma;x)$ 能渐近地与 e^x 一致，这一点不用(12.30)也能証明。

现在假定(13.1)的解 $\psi(r, \theta, \varphi)$ 的形状是仅依赖 r 的函数 $R(r)$ 与仅依赖 θ, φ 的函数 $Y(\theta, \varphi)$ 的乘积：即

$$\psi(r, \theta, \varphi)=R(r)Y(\theta, \varphi), \tag{13.3}$$

把它代入于(13.1)，然后除以 $R(r)Y(\theta, \varphi)$ 即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}(E-U)R\right] \\ =-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right. \\ \left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda.\end{aligned} \tag{13.4}$$

与§8同样，这样的 λ 实际必定和 r 无关，也和 θ, φ 无关，故此是常数，因此可知(13.1)能分离为(13.3)的形状；并且 $R(r)$ 适合常微分方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left\{\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)-\frac{\lambda}{r^2}\right\}R=0, \tag{13.5}$$

$Y(\theta, \varphi)$ 适合偏微分方程

$$\begin{aligned}\Lambda Y+\lambda Y\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) \\ +\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0.\end{aligned} \tag{13.6}$$

从物理的观点上考虑輻角部分 $Y(\theta, \varphi)$，首先要求它在区域 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$，即在单位球面上成为单值連續函数，这个函数即所謂**球面(調和)函数**。从下面的討論可以断言，根据单值連續的要求，分离变数时出现的参数 λ 必須具有下面的形状，其中 l 是正整数

$$\lambda=l(l+1), \quad l=0, 1, 2, \cdots. \tag{13.7}$$

且由下述可知，这也能化为 Sturm-Liouville 型方程的奇性本征値問題而解出。

若对球面函数的偏微分方程(13.6)关于 θ, φ 再进行分离

$$Y(\theta,\ \varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \tag{13.8}$$

就能导出两个常微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0, \tag{13.9}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0. \tag{13.10}$$

m 也是分离变数时出现的参数。

如果对(13.9)的解加以单值的要求，它就成为(9.1)討論的关于 φ 的周期性条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi), \tag{13.11}$$

把 m＝正整数取作本征值，与此对应的本征函数则为

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{13.12}$$

另一方面在(13.10)中令

$$x=\cos\theta \tag{13.13}$$

为自变数，就能得到 **Legendre 伴随微分方程**

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0. \tag{13.14}$$

对于本征值 $\lambda=l(l+1)$，(13.14)的基本解是

$$\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(C_1\frac{d^mP_l}{dx^m}+C_2\frac{d^mQ_l}{dx^m}\right). \tag{13.15}$$

这里的 $P_l(x)$, $Q_l(x)$ 分别称为第一种，第二种 **Legendre 函数**，是 **Legendre 微分方程**

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\lambda\Theta=0 \tag{13.16}$$

对于本征值 $\lambda=l(l+1)$ 的基本解。

(13.16)作为 $m=0$ 的特款含于(13.14)之中。于是，$Y(\theta,\ \varphi)$ 为单值連續这一要求可用(13.14)的解 $\Theta(x)$ 在其全区域 $-1\leq x\leq 1$ 为单值連續这一条件来代替❶。这是因为根据(13.12)，显見

❶ 或者换为条件 $|Y(\theta,\ \varphi)|^2$ 在全球面上积分存在有限亦可。

$\Phi(\varphi)$ 是单值連續的。

我們現在証明：为了(13.16)的解具有这种性质，λ 的本征値能由(13.7)給出，这个事实与設

$$\lambda=\nu(\nu+1) \tag{13.17}$$

而其 ν 为 0 或正整数之事实等价，在(13.14)中設(13.17)成立，依据

$$\xi=(1-x)/2 \tag{13.18}$$

把自变数 x 换为 ξ，則(13.14)就变为

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}+(1-2\xi)\frac{d\Theta}{d\xi}+\nu(\nu+1)\Theta=0. \tag{13.19}$$

这是 **Gauss 的超几何微分方程**

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2w}{d\xi^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi\}\frac{dw}{d\xi}-\alpha\beta w=0 \tag{13.20}$$

当

$$\alpha=\nu+1,\quad \beta=-\nu,\quad \gamma=1 \tag{13.21}$$

时的特款。

超几何方程(13.20)具有形状为超几何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\xi^k \tag{13.22}$$

的解，这从假定(13.20)在 $\xi=0$ 附近的級数解是

$$w(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^{\rho+k},\quad a_0\neq0, \tag{13.23}$$

然后代入原方程就能証实❶。

---

❶ 把(13.23)代入于(13.20)加以整理之后，即得

$$\rho(\rho-1+\gamma)a_0\xi^{\rho-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\{(\rho+k)(\rho+k-1+\gamma)a_k$$
$$-(\rho+k-1+\alpha)(\rho+k-1+\beta)a_{k-1}\}\xi^{\rho+k-1}=0.$$

从第一項得 $\rho=0$, $\rho=1-\gamma$，从第二項得

$$(\rho+k)(\rho+k-1+\gamma)a_k=(\rho+k-1+\alpha)(\rho+k-1+\beta)a_{k-1},\quad k=1,2,3,\cdots.$$

令 $\rho=0$ 就能給出系数之間的遞推式

$$a_k=\frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)}a_{k-1}.$$

由此就能决定(13.22)的級数解。

我們使用的是(13.21)中設 $\gamma=1$ 的情形，即

$$w_1(\xi)=F(\alpha,\beta,1;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2}\xi^k. \tag{13.24}$$

与此无关的解是

$$w_2(\xi)=F(\alpha,\beta,1;\xi)\log\xi+F_1(\alpha,\beta,1;\xi), \tag{13.25}$$

$$F_1(\alpha,\beta,1;\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2}$$

$$\times\left\{\sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha+r}+\frac{1}{\beta+r}\right)-\sum_{r=1}^{k}\frac{2}{r}\right\}\xi^k, \tag{13.25a}$$

随同 $\xi\to0$ 对数性趋于无限大。

回过头来，再談(13.19)的单值連續解的問題，因为对应(13.25)的解，在 $\xi\to0$ 时，出現对数性的无限大而不連續，所以仅剩下在(13.24)中設(13.21)成立的解

$$F(\nu+1,-\nu,1;\xi)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+k-1)}{(k!)^2}\xi^k. \tag{13.26}$$

它在 $\xi=0$ 的邻域(就原有变数說，在 $x=1$ 的邻域)虽然收斂，但在 $\xi\to1$(即在原有变数 $x=-1$) 的邻域只要不是 $\nu=n$ 便发散。

設(13.26)級数中 ξ^k 的系数为 a_k，則有关系

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{(k+\nu)(k-\nu-1)}{k^2}, \tag{13.27}$$

因此当 ν 等于某一确定的正整数 l 时，若 $k=l+1$，則出現 $a_{l+1}=0$，于是級数終止于有限，除去这种情况，当 k 充分大时，对 k 来說可以无視 ν 的存在，因而

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{k-1}{k}, \tag{13.27a}$$

于是在 $\xi\approx1$，(13.26)是对数性地发散的❶。

---

❶ 設 $\log(1-\xi)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k}$ 的 ξ^k 的系数为 a_k，則有 $a_k/a_{k-1}=(k-1)/k$ 之关系，与(13.27a)的右端一致，故(13.26)和 $\log(1-\xi)$ 同时收斂或发散。

因此"为了(13.16)的解在整个区間 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上連續，唯有限于 $\lambda = l(l+1)$，$l = 0, 1, 2, \cdots$❶ 的情形"。这是(13.7)的本征值，这时(13.26)終止于 $k = l$，从此以后的系数都是0，这么就成为 l 次的多項式，因为多項式显然是单値連續的，所以多項式的解是本征函数，实际，第一种 Legendre 函数 $P_l(x)$ 是 l 次多項式，并且成为(13.16)对于 λ 的本征值 $l(l+1)$ 的本征函数，最常見的写法是

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

$$= \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!\,x^{l-2k}}{k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}. \qquad (13.28)$$

同样能够处理 Legendre 伴随方程(13.14)的 λ 的本征值，即在(13.14)中令

$$\Theta = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u, \qquad (13.29)$$

則成为关于 u 的方程

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx} + \{\nu(\nu+1) - m(m+1)\}u = 0. \quad (13.30)$$

对于(13.30)作变换(13.18)，这时代替(13.19)的是

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \{m+1-2(m+1)\xi\}\frac{du}{d\xi} + (\nu-m)(\nu+m+1)u = 0,$$

$$(13.31)$$

这是超几何方程当

$$\alpha = \nu+m+1, \quad \beta = -\nu+m, \quad \gamma = m+1 \qquad (13.32)$$

的情形。从而相当于(13.26)的在 $\xi \approx 0$ 为有限的解为❷

---

❶ 若把 l 換成 $-l-1$，$l(l+1)$ 的値不变，根据这种意义，負整数的 l 給出相同的 λ 的特征值，所以，并不給出独立的特征函数。若把 ν 換作 $-\nu-1$，显見(13.26)不变，因此无考虑 $l = -1, -2, \cdots$ 之必要。

❷ 第二解更为复杂，但是由于它以 ξ^{-m} 的程度成为无限大，所以不属于問題范圍之內。

$$F(\nu+m+1,\ -\nu+m,\ m+1;\ \xi)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+m+1)(\nu+m+2)\cdots(\nu+m+k)(-\nu+m)(-\nu+m+1)\cdots(-\nu+m+k-1)}{k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\xi^k. \tag{13.33}$$

从而，对于它的一般項，与(13.27)对应的是

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{(k+\nu+m)(k-\nu+m-1)}{k(k+m)}. \tag{13.34}$$

当 $\nu=n$ 为正整数时，除去 $k=n-m+1$, $a_k=0$ 的場合，級数不会終止于有限項，当 k 充分变大时，对于 k 若无視 ν 就有

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}\approx\frac{k+m-1}{k},\quad k\gg 1, \tag{13.35}$$

而且当 $\xi\sim 1$, (13.33)发散。如果考察它的发散程度，則不难了解为 $(1-\xi)^{-m}$，这是因为 $(1-\xi)^{-m}$ 的展开式

$$(1-\xi)^{-m}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-m}{k}(-\xi)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!}\xi^k$$

中一般項的系数 a_k, a_{k-1} 之比为

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{k+m-1}{k}, \tag{13.35a}$$

与(13.35)一致。

这說明了，(13.29)的 $u(\xi)$ 在 $\xi\sim 1$, 以 $(1-\xi)^{-m}$ 的程度而发散，再考慮 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}=2^m\xi^{\frac{m}{2}}(1-\xi)^{\frac{m}{2}}$ 中的 $(1-\xi)^{\frac{m}{2}}$，則知

$$\Theta(\xi)\sim(1-\xi)^{-\frac{m}{2}}$$

隨同 $\xi\to 1$ 发散，也就說，只要 $\nu\neq l$, l 为正整数，Legendre 伴随方程就不能具有有界的解。

总括起来說，"仅当 l 是正整数，$\lambda=l(l+1)$，才是对于奇性边界条件的本征值"。屬于这种本征值的(13.14)的本征函数为

$$\Theta(x)=P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l}{dx^m}. \tag{13.36}$$

因此，使球面函数的偏微分方程(13.6)的解在全球面上成单值連續函数的参数 λ 的本征值是由(13.7)給出的。屬于这种本征值 $\lambda=l(l+1)$ 的本征函数 $Y_l(\theta,\varphi)$ 存在，并有 $2l+1$ 个，即

$$P_l(\cos\theta),\quad P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad P_l^m(\cos\theta)e^{-im\varphi},\quad 1\leqslant m\leqslant l. \tag{13.37}$$

根据量子力学熟知的理論，若原子的角动量算子为 $\boldsymbol{L}$，則 $\boldsymbol{L}^2$ 的本征值即为 $l(l+1)\hbar$.

下面的定理和問題是直接和 §10 联系着的，因为本书到 §13 才讲到球面函数，所以只好安排在这里，这些結果将在 §34 中用到。

定理和問題

(1) 用定义于球面($0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$)上的完全正交函数系 $P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $m=-n, -n+1, \cdots, 0, 1, \cdots, n$; $n=1, 2, 3, \cdots$ 作 Fourier 展开

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{a}$$

$$C_{nm}=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')e^{-im\varphi'}P_n^{|m|}(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'. \tag{b}$$

若将結果用实数写出，則为

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{A_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi$$
$$+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)\Big\}, \tag{c}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{n0}=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi',\\
&\begin{pmatrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{pmatrix}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')\,P_n^m(\cos\theta')\begin{pmatrix}\cos m\varphi'\\ \sin m\varphi'\end{pmatrix}\\
&\qquad\times\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

(2) 两个 n 次球面函数

$$\left.\begin{aligned}
Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)=&A_{n0}^{(1)}P_n(\cos\theta)\\
&+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\{A_{nm}^{(1)}\cos m\varphi+B_{nm}^{(1)}\sin m\varphi\},\\
Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)=&A_{n0}^{(2)}P_n(\cos\theta)\\
&+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\{A_{nm}^{(2)}\cos m\varphi+B_{nm}^{(2)}\sin m\varphi\}
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

的乘积在单位球上的积分是

$$\iint_S Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\left[2A_{n0}^{(1)}A_{n0}^{(2)}+\sum_{m=1}^{n}\{A_{nm}^{(1)}A_{nm}^{(2)}+B_{nm}^{(1)}B_{nm}^{(2)}\}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right].\qquad\text{(b)}$$

特别令 $Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)=P_n(\cos\theta)$，则有

$$\iint_S Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\frac{4\pi}{2n+1}Y_n^{(1)}(0),\qquad\text{(c)}$$

又当

$$Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)=P_n(\cos\omega),\quad \cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\qquad\text{(d)}$$

时，有

$$\iint_S Y_n(\theta,\varphi)P_n(\cos\omega)d\Omega=\frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta',\varphi').\qquad\text{(e)}$$

提　示　从 $Y_n^{(1)}(0)=Y_n^{(1)}(0,\varphi)=A_{n0}^{(1)}$ 得出作为(b)的特款的(c)．为了导出(e)，把球面坐标的极取在 P′ 处，这么取新变数 ω 及 Φ 代替 θ,φ，設用新变数把 $Y_n(\theta,\varphi)$ 变换成 $Y_n^{(1)}(\omega,\Phi)$，则有

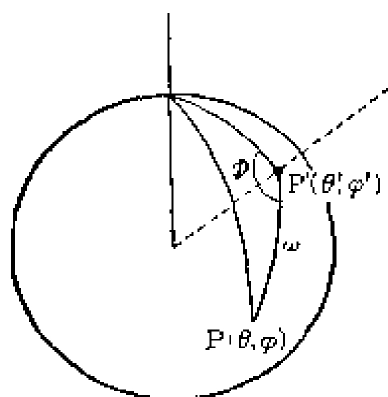


图　13.2

$$\iint_S Y_n(\theta,\varphi)P_n(\cos\omega)d\Omega$$

$$=\iint Y_n^{(1)}(\omega,\Phi)P_n(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega\,d\Phi,$$

这么就可归結为(c)的情况。因为 $Y_n^{(1)}(0)=Y_n^{(1)}(0,\Phi)=Y_n(\theta',\varphi')$，即得(e)．

(3) 試导出

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{m=-n}^{n}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{|m|}(\cos\theta)P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

此地　　$\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$．

提　示

$$P_n(\cos\omega)=A_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),$$

在(e)式把 $Y_n(\theta,\varphi)$ 置为 $P_n(\cos\theta)$，$P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}$ 而計算之，即得

$$A_{n0}=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_S P_n(\cos\omega)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=P_n(\cos\theta'),$$

$$\begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint P_n(\cos\omega) P_n^m(\cos\theta) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta') \begin{pmatrix} \cos m\varphi' \\ \sin m\varphi' \end{pmatrix}.$$

(4) 試証用規范正交系 $\Theta_n^{|m|}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta)$, $\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$, 把 (3) 的 $P_n(\cos\omega)$ 規范化了的函数 $D_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\omega) = \sum_{m=-n}^{n} \Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\Phi_m(\varphi)\overline{\Phi}_m(\varphi')$ 适合积分公式

$$\iint_S Y_n(\theta, \varphi) D_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = Y_n(\theta', \varphi').$$

提　示　試把(2), (e)变形。

(5) 从(4)定义的函数 $D_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$作函数

$$D(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\Phi_m(\varphi)\overline{\Phi}_m(\varphi'),$$

証明它是球面上的 δ 函数, 即有性質

$$f(\theta, \varphi) = \iint_S D(\theta, \varphi; \theta', \varphi') f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'.$$

提　示　試把(1), (a), (b)变形。

§14 量子力学上的 Kepler 問題的本征值問題之二　矢徑部分

輻角部分的奇性本征值問題已經解决了, 今轉向矢徑函数的奇性本征值問題, 但下面仅討論 Coulomb 力所产生的势 $V(r) = \frac{-e^2}{r}$ 的情形。因为 λ 的本征值已經确定为 $l(l+1)$, 那么(13.5)就能写成

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left\{\varepsilon + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R = 0,$$

$$l = 0, 1, 2, \cdots. \tag{14.1}$$

其中使用了原子单位，即設 $m_0=1$, $\hbar=1$, $e=1$，又简单地記 $\varepsilon=2E$.

对于(14.1)，把因变数 R 改变为

$$W=rR,\tag{14.2}$$

即得关于 r, W 的方程

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\left\{\varepsilon+\frac{2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}W=0.\tag{14.3}$$

(14.3)和§12的情形相同，其主部能作因子分解，即

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2W}{dr^2}+\left\{\varepsilon+\frac{2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}W\\
&=\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l}-\frac{l}{r}\right\}\left\{\frac{d}{dr}-\frac{1}{l}+\frac{l}{r}\right\}W(r,l)\\
&\quad+\left\{\varepsilon+\frac{1}{l^2}\right\}W(r,l)\\
&=\left\{\frac{d}{dr}-\frac{1}{l+1}+\frac{l+1}{r}\right\}\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r}\right\}W(r,l)\\
&\quad+\left\{\varepsilon+\frac{1}{(l+1)^2}\right\}W(r,l)=0.
\end{aligned}\tag{14.4}$$

若令

$$\overset{(l)}{T}=\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r},\quad \underset{(l)}{T}=\frac{d}{dr}-\frac{1}{l}+\frac{l}{r},\tag{14.5}$$

与§12相同，能够得出結論，它們分别是关于参数 l 的升算子与降算子：

$$\overset{(l)}{T}W(r,l)\subset W(r,l+1),\ \underset{(l)}{T}W(r,l)\subset W(r,l-1).\tag{14.6}$$

对于(14.4)，当

$$\varepsilon=-\frac{1}{(l+1)^2}\tag{14.7}$$

时，則它的求解問題归結为解一阶方程

$$\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r}\right\}W=0\tag{14.8}$$

的問題，由此可知存在有如

$$W(r)=r^{l+1}e^{-\frac{r}{l+1}} \tag{14.9}$$

的简单解。

$r=0$ 是微分方程(14.1)的正則奇点，$r=\infty$ 是不正則奇点，所以它的解当 $r\to0$ 或 $r\to\infty$ 时，一般来說是发散的，可是解(14.9)在 $0\leqslant r<\infty$ 的全区間上是单値連續(有界)的，这是因为特别把参数已选成(14.7)的原故。所以(14.7)就是奇性边界条件的本征值。因此即知若正整数 $n=l+1$ 遍历 1, 2, 3, …，則

$$\varepsilon=-\frac{1}{n^2}, \quad n=1, 2, 3, \cdots \tag{14.10}$$

是参数 ε 的本征値。从物理上說，因为 ε 表示电子能量，这么(14.10)就給出了能量本征値的关系。当 ε 的本征値对于正整数 n 由(14.10)給出时，(14.9)是对应于比 n 仅小 1 的 $l=n-1$ 的状态[1]的本征函数。若再用降算子 $\underset{(l)}{T}$ 对它作用，就能得到相当于 ε 的状态的，也就是 n 不变而 l 逐次下降 1 的状态的本征函数。

一般是从(14.9)出发作出属于某一 $n=l+1$ 的本征函数，再令 l 的値逐次降低一个整数，一直到达 $l=0$。对于 l 下降为負整数的情形就无須考虑了，这因为，按 §13 的結果从 $-l-1$ 或 l 出发得到的本征値是相同的，所以所属的本征函数也是相同的。因为这么作出的函数都是指数函数 $e^{-\frac{r}{l+1}}$ 乘以 r 的多項式，在 r 的全区間都是单値連續的。所以对于(14.10)的 ε 的本征値，得到 $l=n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ 共計 n 个本征函数

$$W_{n,n-1}(r), \quad W_{n,n-2}(r), \cdots, \quad W_{n,l}(r), \cdots,$$
$$W_{n,1}(r), \quad W_{n,0}(r).$$

从(14.9)可得到关系

---

[1] 在物理上說，方位量子数 l 仅比主量子数 n 小 1 的状态。

$$\int_0^\infty (r^n e^{-\frac{r}{n}})^2 dr = \left(\frac{n}{2}\right)^{2n+1}(2n)!.$$

因此如取

$$W_{n,n-1}(r) = r^n e^{-\frac{r}{n}} \Big/ \left(\frac{n}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{(2n)!}\ , \qquad (14.11)$$

即得正规化：

$$\| W_{n,n-1}(r) \|^2 = 1. \qquad (14.12)$$

是否(14.10)之外不再有其他的 ε 的本征值呢？对于 $\varepsilon<0$ 的情况，使用§13討論諧和振子的本征值問題的相同的方法，就能知道除此以外不存在其他的本征值。

对于(14.3)，若把自变数变为

$$\rho = 2\sqrt{-\varepsilon}\, r, \quad \varepsilon<0, \qquad (14.13)$$

即得到所謂 **Whittaker 方程**

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{k}{\rho} - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}\right\}W = 0,$$

$$k = 1/\sqrt{-\varepsilon}\ , \quad m = l + \frac{1}{2}. \qquad (14.14)$$

对 Whittaker 方程(14.14)，通过变换

$$W(z) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{m+\frac{1}{2}} w, \qquad (14.15)$$

能变为

$$\rho \frac{d^2w}{d\rho^2} + \{(2m+1)-\rho\}\frac{dw}{d\rho} - \left(m-k+\frac{1}{2}\right)w = 0. \qquad (14.16)$$

(14.16)是在§12所討論的合流超几何方程(12.15)，当

$$\alpha = m-k+\frac{1}{2}, \quad \gamma = 2m+1 \qquad (14.17)$$

时的情形。(14.16)在 $\rho=0$ 的邻域的正则解可用合流超几何函数表示为

$$w_1(\rho) = F\left(m-k+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ \rho\right)$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(m-k+\frac{1}{2}\right)\left(m-k+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(m-k+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!(2m+1)(2m+2)\cdots(2m+s)}\rho^s.$$

$$(14.18)$$

若用原有的变数与参数写出，則是

$$w_1(r)=F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}\,;\ 2l+2;\ 2\sqrt{-\varepsilon}\,r), \qquad (14.19)$$

从而可得(14.14)的在 $r=0$ 邻域的正則解

$$U_1(r)=e^{-\sqrt{-\varepsilon}r}(2\sqrt{-\varepsilon}\,r)^{l+1}F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}\,;\ 2l+2;\ 2\sqrt{-\varepsilon}\,r). \qquad (14.20)$$

为什么(14.10)的值是本征值呢？事实上，出现于(14.20)的合流超几何級数的分子，具有因子 $(l-1/\sqrt{-\varepsilon})+s$，$s=1, 2, 3, \cdots$，若 $\sqrt{-\varepsilon}=\dfrac{1}{n}$，$n$ 为正整数，則对于給定的正整数組：n，$l\leq n-1$ 一定有充分大的整数 s，使得分子为 0．于是級数終止于有限項而成为多項式。这时，因为(14.20)中含指数函数的因子，只要是 $\varepsilon<0$，直到无限，它总有界，所以成为奇性边界值問題的本征函数。不是这样情况的时候怎样？根据 $F(\alpha;\gamma;x)$ 的漸近展开(12.30)，(14.20)在 $r\to\infty$ 的动态如

$$\begin{aligned}&F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}\,;\ 2l+2;\ 2\sqrt{-\varepsilon}\,r)\\&\quad\sim\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+1/\sqrt{-\varepsilon})}(-2\sqrt{-\varepsilon}\,r)^{(1/\sqrt{-\varepsilon})-l-1}\\&\qquad+\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon})}e^{2\sqrt{-\varepsilon}r}(2\sqrt{-\varepsilon}\,r)^{-(l+1+1/\sqrt{-\varepsilon})},\end{aligned} \qquad (14.21)$$

因此当 $\sqrt{-\varepsilon}\neq1/n$ 时，$1/\Gamma(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon})$ 不得为 0，由此可知含有 $e^{2\sqrt{-\varepsilon}r}$ 的第二項必然保留下❶，尽管(14.20)的前头乘以因子 $e^{-\sqrt{-\varepsilon}r}$，但 $U_1(r)$ 随同 $r\to\infty$ 終以 $e^{\sqrt{-\varepsilon}r}$ 的程度指数函数性地发散。

从而"ε 的本征值只要 $\varepsilon<0$，就不存在(14.10)之外的值"。

量子力学上的 Kepler 問題的矢徑本征函数，常常使用 Laguerre 函数 $L_n^{(m)}$ 表示。就是由关系

$$\begin{aligned}L_n^{(m)}(z)&=\frac{d^mL_n(z)}{dz^m}\\&=(-1)^m\frac{\{\Gamma(n+1)\}^2}{m!\,\Gamma(n-m+1)}F(-(n-m);\ m+1;\ z)\end{aligned} \qquad (14.22)$$

---

❶ (14.19)的級数中 $(\rho)^s=(2\sqrt{-\varepsilon}\,r)^s$ 的系数 a_s，a_{s-1} 之比

$$a_s/a_{s-1}=\frac{l-1/\sqrt{-\varepsilon}+s}{s(2l+2+s)}\sim\frac{1}{s} \text{ 与 } e^\rho=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\rho^s}{s!}$$

的相应比漸近地一致，因此不用(14.21)也能明确这种漸近程度。

所定义的一种合流超几何函数。不过现在因为 $n=$ 正整数，所以級数終止于有限項。

若使用(14.22)的 Laguerre 函数，从(14.2)，(14.20)，矢徑函数 R 就能写成❶

$$R_{n,l}(\rho)=W_{n,l}(\rho)/\rho$$

$$=(-1)^{2l+1}\frac{(2l+1)!(n-l-1)!}{\{(n+l)!\}^2}e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l\cdot L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho),$$

$$\rho=2r/n \tag{14.23}$$

$$\left[\begin{array}{ll} m\to 2l+1, & n\to n+l \\ m-n\to l+1-n & \end{array}\right].$$

§15　量子力学上的 Kepler 問題之三　迴轉抛物面坐标的分离变数法，連續譜

关于量子力学中 Kepler 問題的 Schrödinger 方程(14.1)，利用迴轉抛物面坐标(ξ,η,φ)也能对变数进行分离(图 15.1)。

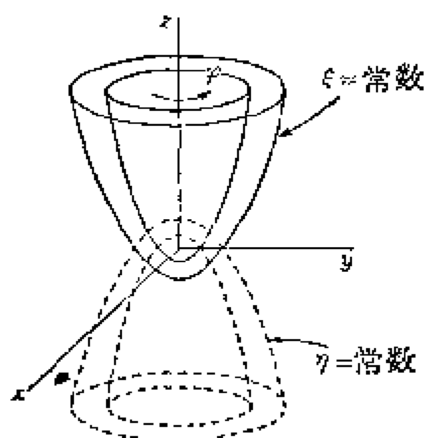


图　15.1

根据变换

$$\left.\begin{aligned} x&=\xi\eta\cos\varphi,\\ y&=\xi\eta\sin\varphi,\\ z&=(\xi^2-\eta^2)/2 \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

可得綫元关系

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

$$=(\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2)$$

$$+\xi^2\eta^2d\varphi^2, \tag{15.2}$$

并且原点到(x,y,z)的距离 r 可表示为

---

❶ 因为 $m=l+\frac{1}{2}$，$k=n=$正整数，所以(14.16)成为

$$\rho\frac{d^2w}{d\rho^2}+\{(2l+1+1)-\rho\}\frac{dw}{d\rho}-(n+l-2l-1)w=0,$$

这就是 Laguerre 方程(10.5)当 $\lambda=n\to n+l$，$m\to 2l+1$ 时的情形，所以出現 $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$。

$$r=(\xi^2+\eta^2)/2. \tag{15.3}$$

这么,在(8.47)中置 $g_1=g_2=(\xi^2+\eta^2)$, $\rho=\xi\eta$, 则得关系

$$\Delta\psi=\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{15.4}$$

从而在(13.1)的解中,关于 z 轴的方位角 φ 具有周期性

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

的解,就成为

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi},\quad m: \text{正整数}。 \tag{15.5}$$

在(15.4)中若置 $\psi(\xi,\eta,\varphi)=\Psi(\xi,\eta)e^{\pm im\varphi}$,则 Ψ 适合偏微分方程

$$\frac{\hbar^2}{2m_0}\left\{\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(E+\frac{2e^2}{\xi^2+\eta^2}\right)(\xi^2+\eta^2)-\frac{\hbar^2}{2m_0}m^2\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\right\}\Psi=0. \tag{15.6}$$

今用单位 $\hbar=1$, $m_0=1$, $e=1$. 并假定此方程能够变数分离

$$\Psi(\xi,\eta)=X(\xi)Y(\eta).$$

为了求 X, Y 所适合的常微分方程,設分离参数为 λ, 且令 $\varepsilon=2E$, 则得

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dX}{d\xi}\right)+\left\{\lambda+2+\varepsilon\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2}\right\}X=0, \tag{15.7}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dY}{d\eta}\right)+\left\{-\lambda+2+\varepsilon\eta^2-\frac{m^2}{\eta^2}\right\}Y=0. \tag{15.7'}$$

再把

$$\xi^2/2=\rho_\xi,\quad \eta^2/2=\rho_\eta,\quad \xi\,d\xi=d\rho_\xi,\quad \eta\,d\eta=d\rho_\eta \tag{15.8}$$

取作新的自变数,于是又能写成

$$\frac{d^2X}{d\rho_\xi^2}+\frac{1}{\rho_\xi}\frac{dX}{d\rho_\xi}+\left\{\varepsilon+\frac{\lambda/2+1}{\rho_\xi}-\frac{m^2/4}{\rho_\xi^2}\right\}X=0, \tag{15.9}$$

$$\frac{d^2Y}{d\rho_\eta^2}+\frac{1}{\rho_\eta}\frac{dY}{d\rho_\eta}+\left\{\varepsilon+\frac{-\lambda/2+1}{\rho_\eta}-\frac{m^2/4}{\rho_\eta^2}\right\}Y=0. \quad (15.9')$$

现在考虑 $\varepsilon<0$ 的場合，若选

$$\varepsilon=-\nu^2/4, \quad \nu\binom{\rho_\xi}{\rho_\eta}=\binom{x}{y}, \qquad (15.10)$$

則(15.9)成为

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\lambda/2+1}{\nu}\frac{1}{x}-\frac{m^2/4}{x^2}\right\}X=0, \qquad (15.11)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dY}{dy}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{-\lambda/2+1}{\nu}\frac{1}{y}-\frac{m^2/4}{y^2}\right\}Y=0. \qquad (15.11')$$

进一步，把因变数改为

$$X=W/\sqrt{x} \quad 以及 \quad Y=W/\sqrt{y}, \qquad (15.12)$$

(15.11)，(15.11′)就都轉变为 Whittaker 方程

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\varkappa}{z}-\frac{m^2/4-1/4}{z^2}\right\}W=0. \qquad (15.13)$$

但假設对应(15.11)取

$$z=x=\nu\rho_\xi, \quad \varkappa=\varkappa_\xi=\{(\lambda/2)+1\}/\nu, \qquad (15.14)$$

对应(15.11′)取

$$z=y=\nu\rho_\eta, \quad \varkappa=\varkappa_\eta=\{-(\lambda/2)+1\}/\nu. \qquad (15.14')$$

如 §14 中所見的，(15.13)在 $x=0$ 邻域的正則解根据(14.15)～(14.18)能由

$$W_1(z)=e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+1}{2}}F\left(\frac{m+1}{2}-\varkappa;\ m+1;\ z\right) \qquad (15.15)$$

給出，从而能由

$$X_1(z)=e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m}{2}}F\left(\frac{m+1}{2}-\varkappa;\ m+1;\ z\right) \qquad (15.15a)$$

給出。所以如同在 §14 中討論的那样，可断言：为了(15.15)当 $z=\infty$ 时有界，就必須 $\frac{m+1}{2}-\varkappa=-n$, $n=0, 1, 2, \cdots$.

因此肯定(15.14)的奇性本征値是

$$\varkappa_\xi=n_\xi+\frac{m+1}{2}, \quad n_\xi=0, 1, 2, \cdots. \qquad (15.16)$$

完全同样地，对于(15.14′)能作出同样結論：

$$\varkappa_\eta = n_\eta + \frac{m+1}{2}, \quad n_\eta = 0, 1, 2, \cdots. \tag{15.16'}$$

根据(15.14),(15.14')作(15.16),(15.16')的和,则得

$$\frac{2}{\nu} = \varkappa_\xi + \varkappa_\eta = n_\xi + n_\eta + m + 1 = n. \tag{15.17}$$

因为 n_ξ, n_η, m 不外是 0 或正整数,所以 n 是正整数,即 $n=1, 2, 3, \cdots$. 从(15.10),(15.17)可得

$$\sqrt{-\varepsilon} = \frac{\nu}{2} = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{15.18}$$

并且知道与(14.19)的能量本征值的結果一致。

又作(15.16),(15.16')之差,则知

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{\nu}{2}(n_\xi - n_\eta) = \frac{n_\xi - n_\eta}{n}. \tag{15.19}$$

作为对应这些本征值的本征函数,将(15.16)代入(15.15),并根据(14.22)用 Laguerre 函数表达的話,对于 $\varkappa_\xi = n_\xi + \frac{m+1}{2}$ 则是

$$X_{n_\xi, m}(\rho_\xi) = e^{-\nu\frac{\rho_\xi}{2}} \rho_\xi^{m/2} L_{n_\xi+m}^{(m)}(\nu\rho_\xi), \tag{15.20}$$

或

$$X_{n_\xi, m}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2n}} \xi^m \frac{L_{n_\xi+m}^{(m)}\left(\frac{\xi^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\xi+1)}. \tag{15.21}$$

同样,对于 $\varkappa_\eta = n_\eta + \frac{m+1}{2}$ 则是

$$Y_{n_\eta, m}(\eta) = e^{-\frac{\eta^2}{2n}} \eta^m \frac{L_{n_\eta+m}^{(m)}\left(\frac{\eta^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\eta+1)}. \tag{15.21'}$$

結果,全体的本征函数为

$$\psi_{n_\xi, n_\eta, m}(\xi, \eta, \varphi) = e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2n}} (\xi\eta)^m \frac{L_{n_\xi+m}^{(m)}\left(\frac{\xi^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\xi+1)} \frac{L_{n_\eta+m}^{(m)}\left(\frac{\eta^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\eta+1)} e^{\pm im\varphi}, \tag{15.22}$$

$$n = n_\xi + n_\eta + m + 1.$$

特别对于 z 軸完全对称的解是相当于 $m=0$ 的情况，

$$\psi_{n_\xi, n_\eta}(\xi, \eta)=e^{-\frac{(\xi^2+\eta^2)}{2n}} L_{n_\xi}\left(\frac{\xi^2}{n}\right) L_{n_\eta}\left(\frac{\eta^2}{n}\right) \Big/ \Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1)$$

$$\cdot e^{-\frac{r}{n}} L_{n_\xi}\left(\frac{\xi^2}{n}\right) L_{n_\eta}\left(\frac{\eta^2}{n}\right) \Big/ \Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1). \tag{15.23}$$

截止目前仅考虑了負能量的場合。总之，所能允許的能量的本征值仅是

$$\sqrt{-\varepsilon}=1/n$$

的情形。但是"当 $\varepsilon>0$ 时，任意的 ε 値适合奇性边界条件，出現了所謂**連續本征值**"。对于 $\varepsilon>0$ 的情形，(15.10)所定义的 ν 成为純虚数，如設为

$$\nu/2=ik=1/n, \tag{15.24}$$

以之代替(15.18)，則 k 为实数。其結果例如 $X(\rho_\xi)$ 就不是(15.21)的实变数 Laguerre 函数而成变数为純虚数的函数，出现了

$$X_{n_\xi, m}(\xi)=e^{-ik(\xi^2/2)}\xi^m L_{n_\xi+m}^{(m)}(ik\xi^2). \tag{15.25}$$

同样能导出

$$Y_{n_\eta, m}(\eta)=e^{-ik(\eta^2/2)}\eta^m L_{n_\eta+m}^{(m)}(ik\eta^2), \tag{15.25'}$$

从而全体的本征函数为

$$\psi_{n_\xi, n_\eta, m}(\xi, \eta, \varphi)=e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}(\xi\eta)^m L_{n_\xi+m}^{(m)}(ik\xi^2) L_{n_\eta+m}^{(m)}(ik\eta^2) e^{\pm im\varphi}. \tag{15.26}$$

但是为了純虚数的 Laguerre 函数在无限远成为有界，就沒有使級数終止于有限項的必要。这就是說，根据(14.22)，Laguerre 函数 $L_n^m(z)$ 能用当 z 有界时就成有界函数的 $F(-(n-m);\ m+1;\ z)$ 表达，在无限远的邻域則能用(12.30)得出。

从

$$F(-(n-m);\,m+1;\,ix)\sim\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}(-ix)^{(n-m)}$$

$$+\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(-(n-m))}e^{ix}(ix)^{-n-1}\quad(15.27)$$

漸近展开而知道，因为 $|e^{ix}|=1$，所以并不出現指数性的发散。又因 n 为純虚数，則 $|(x)^{\pm n}|=|e^{\pm n\log x}|=1$，在无限远点的邻域为有界。这个結果是与 $\varepsilon<0$ 的場合完全不同的，当 $\varepsilon>0$ 时，奇性边界条件对于 ε 的値并不附加任何限制，即能量可連續地取任意値，出現了所謂連續本征值。

現在对于 $\varepsilon>0$ 的情形，选一个物理上有趣味的特殊情况稍作討論。

特別对 z 軸迴轉对称的解，由(15.23)可知是

$$\psi_{n_\xi,n_\eta}(\xi,\eta)=e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}L_{n_\xi}(ik\xi^2)L_{n_\eta}(ik\eta^2)/\Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1).\quad(15.28)$$

从(15.17)，(15.24)可得关系

$$n_\xi+n_\eta+1=n=-i/k.$$

因而 n_ξ, n_η 不得同时为实数，但是 $\Re(n_\xi+n_\eta)=-1$，現在考虑 $n_\xi=-1$ 的特殊情况，即是 $n_\eta=n=-i/k$.

首先当

$$n_\eta=n=-i/k\quad(15.29)$$

时，由(14.22)可得

$$L_{n_\eta}(ik\eta^2)=\{\Gamma(n_\eta+1)\}F(-n_\eta;\,1;\,ik\eta^2),\quad(15.30)$$

从而又由(15.27)得

$$L_{n_\eta}(ik\eta^2)/\Gamma(n_\eta+1)\sim\left\{\frac{1}{\Gamma(1+n_\eta)}(-ik\eta^2)^{n_\eta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(-n_\eta)}e^{ik\eta^2}(ik\eta^2)^{-n_\eta-1}\right\}.\quad(15.31)$$

另一面当

$$n_\xi=-1$$

时

$$\lim_{n_\xi\to-1}L_{n_\xi,0}(ik\xi^2)/\Gamma(n_\xi+1)=F(1;\,1;\,ik\xi^2)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ik\xi^2)^s}{s!}=e^{ik\xi^2},\quad(15.32)$$

$$\therefore \quad \psi_{-1,n_\eta}(\xi,\eta) \sim e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}} e^{ik\xi^2}\left\{\frac{(-ik\eta^2)^{n_\eta}}{\Gamma(1+n_\eta)}\right.$$

$$\left. -\frac{n_\eta}{(-n_\eta)\Gamma(-n_\eta)} e^{ik\eta^2}(ik\eta^2)^{-n_\eta-1}\right\}$$

$$= e^{ik\frac{\xi^2-\eta^2}{2}}\left\{\frac{(-ik\eta^2)^{n_\eta}}{\Gamma(1+n_\eta)} + in_\eta \frac{(ik\eta^2)^{-n_\eta}}{\Gamma(1-n_\eta)}\frac{e^{ik\eta^2}}{k\eta^2}\right\}. \tag{15.33}$$

根据(15.1)可知第一项与 e^{ikz} 成比例，根据(15.3)可知第二项与 e^{ikr}/r 成比例。将此写成

$$\psi_{-1,n_\eta}(\xi,\eta) \sim C_1 e^{ikz} + C_2\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{15.34}$$

C_1, C_2 分别是

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= (-ik\eta^2)^{n_\eta}/\Gamma(1+n_\eta), \\ C_2 &= \frac{in_\eta}{k}(ik\eta^2)^{-n_\eta}/\Gamma(1-n_\eta)(1-\cos\theta) \text{❶}. \end{aligned}\right\} \tag{15.35}$$

又因(15.29)，n_η 能給成純虛数 $-i/k$，所以

$$C_1 = \frac{(-ik\eta^2)^{-i/k}}{\Gamma(1-i/k)}, \tag{15.36}$$

$$C_2 = \frac{1}{k^2}\frac{(ik\eta^2)^{i/k}}{\Gamma(1+i/k)}\frac{1}{(1-\cos\theta)} = \frac{\overline{C}_1}{k^2(1-\cos\theta)}. \tag{15.36'}$$

对于(15.34)的解，配合了时間項 $e^{-i\omega t}$ 考虑的話，“第一項表示随同时間沿着 z 增加方向前进的平面波，第二項表示沿着 r 的增加方向前进的射出球面波”。具有象(15.34)那样漸近形状的稳定解存在这一事实表明“以强度为 C_1 的平面波形沿着 z 的正向前进的波被 Coulomb 力場所扰乱”，又从(15.36)，(15.36′)可知“强度的分布为 $1/k^2(1-\cos\theta)$ 倍”。从这里能导出以 Rutherford 公式而知名的碰撞截面与 $1/k^4(1-\cos\theta)^2$ 成比例的結果。

---

❶ 从(15.1)，(15.3)可知

$$\eta^2 = r - z = r(1-\cos\theta).$$

第3章　Green 函数与边值問題

§16　Green 函数与常微分方程的边值問題

1）**δ 函数与主解❶**　作为解偏微分方程边值問題的有效方法之一有 **Green 函数**法，为了說明一般的概念，首先从一个自变数的特殊情况說起(实际是常微分方程)。

对一維 Poisson 方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\varphi(x), \tag{16.1}$$

考虑边界条件，即在两端 $x=0$ 及 $x=1$ 处规定

$$u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{16.2}$$

的第一种边界条件。先考虑特殊情况

$$\frac{d^2G}{dx^2}=-\delta(x-\xi) \tag{16.3}$$

的解。此地 $\delta(x-\xi)$ 为 Dirac 的 δ 函数，是由性质

（i）　$$\delta(x-\xi)=0,\quad x\neq\xi, \tag{16.4}$$

（ii）　$$\delta(x-\xi)=\infty,\quad x=\xi, \tag{16.4'}$$

（iii）　$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx=1 \tag{16.4''}$$

所定义的❷。

---

❶　亦称为基本解。——譯者注

❷　Dirac 的 δ 函数是为了简单写出量子力学的基本公式而导入的，当然不属于經典函数概念的范疇，但也很自然地能作为包含参数的連續函数的极限来了解。严格地說，本来要通过冗长的計算以及复杂的推导才能得出的結果，現在却能簡易地推导出来，本书即用这种方法。δ 函数的現代数学基础的奠定，則属于广义函数(distribution)的理論。

由上述性质即能得出这样的結論：δ 函数适合关系

$$\text{(iv)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-\xi)\,dx$$

$$=\int_{\xi-0}^{\xi+0} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi). \qquad (16.4''')$$

如下所述，若把 δ 函数了解为連續函数的极限的話，显然这是从积分的中值定理所导出的結果。以下有时把（16.4'''）称为 δ 函数的第四种性质（iv）。

現在，联系着质量或电荷直观地考察（16.4）～（16.4''）的性质，設想連續函数 $\varphi(x)$ 表示质量或电荷的密度的有限分布，而 $\delta(x-\xi)$ 表示在 $x=\xi$ 以外全无质量或电荷，而仅于 $x=\xi$ 处存在单位点載荷（电荷）的情形，这是完全不連續的情况。所以称为单位載（电）荷，就是因为（16.4''）意味着总质量（荷电量）为 1 的原故。与 δ 函数有紧密联系的是 Heaviside 阶梯函数 $Y(x,\xi)$．它是由

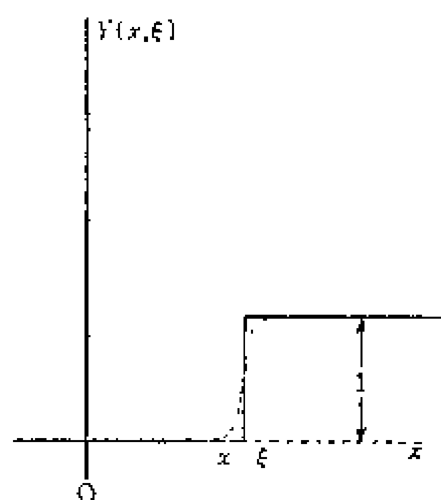


图　16.1

$$Y(x,\xi)=\begin{cases}0, & x<\xi,\\ 1, & \xi<x\end{cases} \qquad (16.5)$$

所定义的，如图 16.1 所示，函数仅在 $x=\xi$ 处不連續。若考虑 $Y(x,\xi)$ 关于主变数 x 的导数，则有

$$\frac{dY(x,\xi)}{dx}=\begin{cases}0, & x<\xi,\\ 0, & \xi<x,\end{cases} \qquad (16.6)$$

因此只要 $x\neq\xi$ 就到处为 0．这表明它适合 $\delta(x-\xi)$ 的性质（i）。又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dY(x,\xi)}{dx}\,dx=Y(\infty,\xi)-Y(-\infty,\xi)=1, \quad (16.7)$$

所以适合性质（iii）。但是在不連續点 $x=\xi$ 处这些性质是否成立

还沒有証明。所以，考虑在跳跃处改为光滑曲綫，如图 16.1 中虚綫所表示的連續函数。

例如当 $\varepsilon>0$ 充分小时，下列的函数就有这样的性质：

$$Y_\varepsilon(x,\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2}dx=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{x-\xi}{\varepsilon}+\frac{\pi}{2}\right\}, \quad (16.8)$$

这么当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，$Y_\varepsilon(x,\xi)$ 收斂于 Heaviside 函数 $Y(x,\xi)$：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}Y_\varepsilon(x,\xi)=Y(x,\xi). \quad (16.9)$$

考虑(16.8)的导数，且把它写成 $\delta_\varepsilon(x-\xi)$，

$$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\frac{dY_\varepsilon(x,\xi)}{dx}=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2}, \quad (16.10)$$

就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-\xi)=0, \quad x\neq\xi,$$

即 δ 函数的性质(i)成立。又在区間 $(-\infty,\infty)$ 就 x 积分 (16.10) 然后考虑 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{Y_\varepsilon(\infty,\xi)-Y_\varepsilon(-\infty,\xi)\}=1,$$

它說明具有性质(iii)。并且当 $x=\xi$ 时对于(16.10)有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-\xi)=\infty$，这說明且有性质(ii)。总之，$\delta$ 函数能作为，象 (16.10) 那样的包含参数的連續函数的极限来理解。于是，关于 $\varepsilon\to 0$ 的极限

$$\frac{dY(x,\xi)}{dx}=\delta(x-\xi), \quad (16.11)$$

这就說明了 δ 函数能够解釋为 Heaviside 函数的导数。从积分公式，又能把(16.10)写成积分表示：

$$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varepsilon k}\cos k(x-\xi)dk. \quad (16.12)$$

如再考虑(16.12)当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，則得到 δ 函数的积分表示

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos k(x-\xi)\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk. \quad (16.13)$$

这个公式在下面的計算中时常用到。从普通的数学分析概念来說，虽然上面的推导不太严密，但是作为(16.12)的极限来看，是比較容易理解的。

如 §11 的討論那样，公式 (16.13) 也可作为 Fourier 积分定理的极限导出。

2) Green 函数与边値問題的解　"方程 (16.3) 的解而且适合边界条件(16.2)的函数叫做 **Green 函数 $G(x,\xi)$**"。利用 Green 函数 $G(x,\xi)$ 可以把适合所給方程(16.1)，及边界条件 (16.2) 的解表示为

$$u(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{16.14}$$

这种 Green 函数的解法是解边界値問題的主要方法。原則上，能直接扩充而解偏微分方程的边値問題。

假設巳經求出了 (16.3) 的解，且是适合边界条件的，即为 Green 函数 $G(x,\xi)$，那么就容易驗証 (16.14) 恰是所給方程的解。就是对于一維 Green 公式

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(v(x)\frac{d^2u}{dx^2}-u(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx=\left(v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1}, \tag{16.15}$$

假設 u 是 (16.1) 的适合边界条件 (16.2) 的解，v 是适合相同一边界条件(16.2)的，方程(16.3)的解，即为 Green 函数 $G(x_0=0,\ x_1=1)$，則左端成为

$$\int_0^1\left\{G(x,\xi)\frac{d^2u}{dx^2}-u(x)\frac{d^2G}{dx^2}(x,\xi)\right\}dx$$
$$=-\int_0^1 G(x,\xi)\,\varphi(x)dx+\int_0^1 u(x)\,\delta(x-\xi)\,dx, \tag{16.16}$$

对最后一項利用性质(16.4″)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\delta(x-\xi)dx=f(\xi), \tag{16.17}$$

就可得出

$$u(\xi)-\int_0^1 G(x,\xi)\varphi(x)dx,$$

另一方面，右端$\left(G(x,\xi)\dfrac{du}{dx}-u(x)\dfrac{dG(x,\xi)}{dx}\right)\Bigg|_0^1$ 因为 $u(x)$，$G(x,\xi)$ 在边界 $x=0,\ 1$，适合(16.2)，故等于 0．因此

$$u(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)\varphi(x)dx, \tag{16.18}$$

把 x,ξ 的作用互换，則得

$$u(x)=\int_0^1 G(\xi,x)\varphi(\xi)d\xi. \tag{16.19}$$

可是 Green 函数一般具有互易性，即調换其主变数 x 与副变数 ξ 并不影响其値❶：

$$G(x, \xi)=G(\xi, x), \tag{16.20}$$

故(16.19)又能改写成

$$u(x)=\int_0^1 G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

这就是关系(16.14)。

現在对这个解試作物理上的說明。众所周知，Poisson 方程 (16.1) 表示給定了以 $\varphi(x)$ 为載荷或电荷的密度分布的重力場或靜电場的势的方程。但是也可以解釋为：当把一条弦拉緊成一条直綫时，若 $\varphi(x)$ 是垂直作用外力的分布函数，則 u 表示弦的靜态变形。依照这种看法，$G(x, \xi)$表示点 $x=x$ 处所发生的变形，若在 $x=\xi$ 这点处有1单位的集中外力(图 16.2)作用的話。如果在 $x=\xi$ 处作用的力不是单位的力，而是 $\varphi(\xi)$时，那末在 $x=x$ 处的变形則为 $G(x, \xi)\varphi(\xi)$. 从而由密度分布为 $\varphi(\xi)$ 的連續力所产生的总体变形就能解釋为是由(16.14)所給出的积分(迭加原理)。

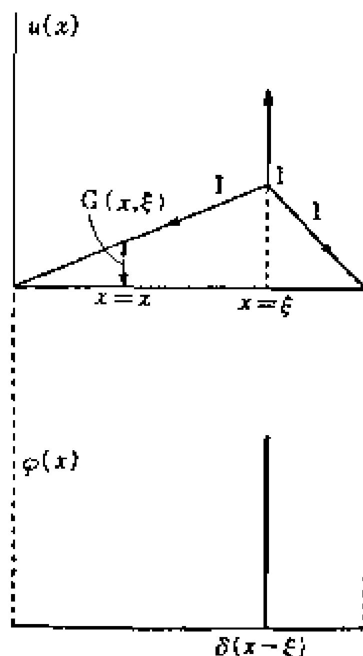


图 16.2

其次，Green 函数的具体形状将如何导求呢？这就有求微分方程(16.3)的解的必要。

比較(16.11)，(16.3)，則得

$$\frac{dG(x, \xi)}{dx}=-Y(x-\xi). \tag{16.21}$$

因此即知，$G(x, \xi)$ 是把 Heaviside 函数改换符号，然后积分而得的一个特解

$$G(x, \xi)=\begin{cases}0, & x\leq\xi, \quad (16.22)\\ -(x-\xi), & \xi\leq x. \quad (16.22')\end{cases}$$

方程(16.3)当 $x\neq\xi$ 时右端为 0，且几乎到处等于

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0, \tag{16.23}$$

仅在 $x=\xi$ 处，因为奇性显示着差异。于是把(16.22)～(16.22′)所定义的，在 $x=\xi$ 处具有不連續性的方程(16.3)的解称为(16.23)的**基本解**。因为 (16.23)

❶ 我們将于 §21 就两个以上自变数的偏微分方程論証这个定理，此地則为节省篇幅，証明从略。

是(16.3)的齐次方程,所以对于(16.3)的特解(16.22)加上(16.23)的任意解,仍是(16.3)的解。其实,基本解(16.22)本身并不能适合边界条件(16.2),但是加上了(16.23)的一般解,也就是加上了关于 x 的綫性函数后,能够得到适合边界条件的 Green 函数。如对基本解(16.22)加上綫性函数 $(1-\xi)x$,得到

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x, & x\leq\xi, \quad (16.24)\\ \xi(1-x), & \xi\leq x \quad (16.24')\end{cases}$$

就适合条件(16.2)。它在各部分区間是綫性的,图象如图 16.2 所示且与上述的物理意义相符合。

Green 函数的导数,由(16.21)可见,在 $x=\xi$ 处作不連續地跳跃。在 $x=\xi$ 前后的跳跃,則由

$$\frac{dG(\xi+0,\xi)}{dx}-\frac{dG(\xi-0,\xi)}{dx}=-1 \tag{16.25}$$

給出。

Green 函数的一阶导数虽是这样地不連續,但是二阶导数則 δ 性地成为无限大而发生了剧烈的不連續性,因此使用仅当連續函数时才成立的公式(16.15)导出(16.18)的过程,从数学分析的严密的观点来說是不妥当的。实际上,根据这种观点,应該把区間分为 $(0,\xi-0)$ 与 $(\xi+0,1)$ 而分别計算。这样(16.18)就成为

$$\int_0^{\xi-0}\{G(x,\xi)u''(x)-u(x)G''(x,\xi)\}dx$$
$$=G(x,\xi)u'(x)-u(x)G'(x,\xi)\Big|_0^{\xi-0},$$

$$\int_{\xi+0}^1\{G(x,\xi)u''(x)-u(x)G''(x,\xi)\}dx$$
$$=G(x,\xi)u'(x)-u(x)G'(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^1.$$

因为在各部分区間上 $u''(x)=-\varphi(x)$, $G''(x,\xi)=0$ 成立,取左端之和則有

$$-\int_0^{\xi-0}G(x,\xi)\varphi(x)dx-\int_{\xi+0}^1G(x,\xi)\varphi(x)dx$$
$$=-\int_0^1G(x,\xi)\varphi(x)dx.$$

而右端代入 $x=0$, $x=1$ 的值后,因边界条件消失,所以右端之和因 $G(x,\xi)$ 自身及 $\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 处連續,而成为

$$G(\xi-0,\,\xi)u'(\xi)-u(\xi)G'(\xi-0,\,\xi)-G(\xi+0,\xi)u'(\xi)+u(\xi)G'(\xi+0,\,\xi)$$
$$=\{G'(\xi+0,\,\xi)-G'(\xi-0,\,\xi)\}u(\xi)=-u(\xi)\quad[\text{基于}(16.25)]$$

結果导出(16.19)。也就是說,不根据严密的方法,把区間分割为連續的区間并分別計算,而直接令 $\frac{d^2G}{dx^2}$ 等于 $-\delta(x-\xi)$,把 Green 公式对全区間使用,并用公式(16.4''')也能得到正确的結果。以后就不再一次一次地檢查推导的严密性,而按照結果是正确的簡单方法进行計算。理論上的严密化留待广义函数来討論,已远超出本书范圍了。

更一般地若設 L 为自伴微分算子

$$L_x[u]\equiv\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u,\tag{16.26}$$

可以用与上面相同的方法,求在区間 $[a,\,b]$ 上适合非齐次方程

$$L_x[u]=-\varphi(x),\tag{16.27}$$

在区間两端 $a,\,b$ 适合形如

$$B_a[u]\equiv p(a)u'(a)\sin\alpha-u(a)\cos\alpha=0,\tag{16.28}$$

$$B_b[u]\equiv p(b)u'(b)\sin\beta-u[b]\cos\beta=0\tag{16.28'}$$

的齐次边界条件的解,首先,如果能够得到

$$L_x[G(x,\,\xi)]=-\delta(x-\xi)\tag{16.29}$$

的解,且适合同样的边界条件(16.28),这就是 Green 函数 $G(x,\,\xi)$,利用它就能得到解 u 为

$$u(x)=\int_a^b G(x,\,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.\tag{16.30}$$

怎样求 $G(x,\,\xi)$ 呢? 象 §17 对 Poisson 方程所作的那样,先不考虑边界条件,利用 Fourier 积分求出基本解 $G_0(x,\xi)$,再求出(16.27)的齐次方程的基本解,設为 U_1, U_2,作它們的組合 $U=C_1U_1(x)+C_2U_2(x)$,然后迭加之,即得

$$G(x,\,\xi)=G_0(x,\,\xi)+C_1U_1(x)+C_2U_2(x),\tag{16.31}$$

最后,决定 C_1, C_2 使得(16.31)适合(16.28),因此就预先求定适合边界条件的完全正交本征函数系,再以如(10.17)~(10.19)的形

状表示 $\delta(x-\xi)$，并代入(16.29)的右端而直接求出 $G(x,\xi)$。

与此相关的，介紹一下(16.26)的算子 L_x，关于 Sturm-Liouville 型方程

$$L_x[u]+\lambda u=0 \tag{16.32}$$

的边界条件(16.28)的本征值問題可归結于积分方程的著名定理。

对于(16.27)特别令 $\varphi(x)\to\lambda u(x)$，即成(16.32)。因此(16.32)关于边界条件(16.28)的本征函数必須适合对(16.30)施行相同置换 $\varphi\to\lambda u$ 而得到的积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)u(\xi)d\xi, \tag{16.33}$$

这也就是說，在所給边界条件下求(16.32)的本征函数的問題，能归結为以 Green 函数 G 为核的积分方程(16.33)的适合相同边界条件的本征值問題。特別自伴型方程的 Green 函数是对称的，$G(x,\xi)=G(\xi,x)$，所以这是有名的对称核的情形，本征值問題的解用积分方程的理論已經圓滿地解决了。

§17 利用 Fourier 积分求基本解的方法

为了决定 Green 函数的形状，前面曾使用了它与 Y 函数的关系(16.21)，但是这个关系是作为极限而理解的，却不是眞正的証明，只有在广义函数論中才能奠定严密的基础，但是对于偏微分方程相当于(16.3)的情况，作为求方程基本解的具有一般性的方法以利用 Fourier 积分最为便利，以后就将系統地用这种方法，現在先从方程(16.3)說起。

根据 δ 函数的 Fourier 表达式(16.13)能够写成

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk,\quad -\infty<x,\xi<\infty, \tag{17.1}$$

因此为了解(16.3)，設基本解 $G_0(x,\xi)$ 的形状是

$$G_0(x,\xi)\equiv G_0(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{ik(x-\xi)}dk, \tag{17.2}$$

代入(16.3)，則有 $\int_{-\infty}^{\infty}\{k^2g(k)-1\}e^{ik(x-\xi)}dk=0$。由此决定 $g(k)=1/k^2$，再代入于(17.2)，則得下列关系：

$$G_0(x,\ \xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk. \tag{17.3}$$

这里 $k=0$ 是被积函数的奇点，而 (17.3) 的积分发散。因之如图 (17.1) 那样，取 k 的积分路綫为实軸，但是在 $k=0$ 附近，改取路綫为实軸下面的半徑为 ε 的小半圆，以躲开奇点。这样就代替了 $G_0(x,\ \xi)$，而有

$$G_\varepsilon(x,\ \xi)=\lim_{K\to\infty}G_K(x-\xi),\quad G_K(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\oint_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk \tag{17.3'}$$❶

与此相应，(17.1)的 $\delta(x-\xi)$ 也要代之以

$$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\oint_{-K}^{K}e^{ik(x-\xi)}dk. \tag{17.1'}$$

这时，代替(16.3)的是微分方程

$$\frac{d^2G_\varepsilon}{dx^2}=-\delta_\varepsilon(x-\xi). \tag{17.4}$$

于此，考虑 $\varepsilon\to0$ 时的极限，因为 $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ 收斂于 $\delta(x-\xi)$，所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}G_\varepsilon(x,\xi)$ 給出所求的基本解 $G_0(x,\ \xi)$. 現在如下地計算 $G_K(x-\xi)$. 首先从 $x<\xi$ 的情况来考虑。在 k 复平面上实軸的下半面，对于 G_K 的积分路綫，再补上半徑为 K 的半圆后，则成为封閉曲綫 C_1:OABCO. 对于 C_1 上面的复值积分是

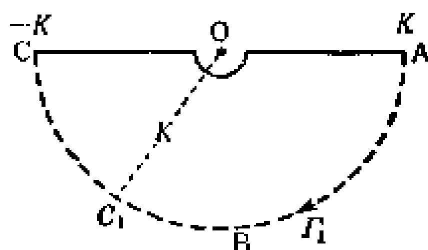


图 17.1

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=\frac{1}{2\pi}\oint_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk$$

考虑当 $K\to\infty$ 时的极限。这么，在 Γ_1 上因 $\Im(k)<0$，故

$$e^{ik(x-\xi)}=e^{-\Im(k)(x-\xi)+i\Re(k)(x-\xi)},$$

根据 $x<\xi$ 的假定，随同 $|k|\to\infty$，被积函数则指数函数性地收斂于 0，总之，在 Γ_1 上的积分結果为 0. 因为被积函数在 C_1 内部到处正则，故按 Cauchy 定理 $\oint_{C_1}=0$. 由此即得

❶ 我們在下面的讲解中，系統地用残数定理的方法来計算表示基本解的复值积分。如果用实值积分，为了免得(17.3)中的积分发散，那么代替原来的基本解 $G_0(x,\ \xi)$，应該代以 $\widetilde{G}(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)dk$，事实上对 $\widetilde{G}(x,\ \xi)$ 具体計算后，可以知道它等于 $-|x-\xi|/2$，与本书的結果(17.7)不同，但是两者的差为 $|x-\xi|/2$ 是齐次方程 $\frac{d^2G}{dx^2}=0$ 的解。

$$G_\varepsilon(x-\xi)=\lim_{K\to\infty}G_K(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=0,\quad x<\xi. \quad (17.5)$$

其次考虑 $\xi<x$ 的場合。因为 $\xi<x$，Γ_1 的积分发散，于是如图 17.2，在上半面补上半徑为 K 的半圆 Γ_2，則 G_K 的积分路綫形成封閉曲綫 C_2，若考慮沿此曲綫的同样的积分

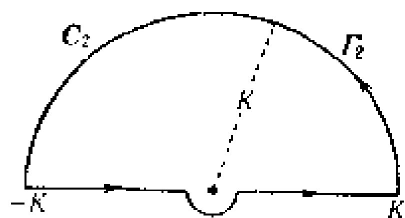


图　17.2

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk,$$

則因 $e^{ik(x-\xi)}=e^{-\Im(k)(x-\xi)+i\Re(k)(x-\xi)}$，$\xi<x$，$\Im(k)>0$，故 Γ_2 上的积分收斂于 0.

C_2 内部的不正則点仅是二阶的极点 $k=0$，因而若把被积函数在 $k=0$ 处的殘数記为 $(\mathrm{Res})_{k=0}$，則有

$$G_\varepsilon(x-\xi)=\lim_{K\to\infty}G_K(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}\right)_{k=0},$$

因 $\dfrac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}=\dfrac{1}{k^2}(1+ik(x-\xi)+\cdots)$，有 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}\right)_{k=0}=i(x-\xi)$，故

$$G_\varepsilon(x-\xi)=-(x-\xi),\quad \xi<x, \quad (17.6)$$

但(17.5)，(17.6)的結果与 ε 无关。从而得到

$$G_0(x-\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon(x-\xi)=\begin{cases}0, & x\leqslant\xi, \quad (17.7)\\ -(x-\xi), & \xi\leqslant x. \quad (17.7')\end{cases}$$

这就是与(16.22)一致的基本解。然后，可用前面講过的方法，决定适合边界条件的 Green 函数。

Fourier 积分(11.2)以及 δ 函数的积分表达式(17.1)便于表示在无界区域 $-\infty<x<\infty$ 上的函数，对于有限边界的情况，则以使用定义于有限区間 $[a, b]$ 上的完全正交函数系 $\varphi_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$ 的 Fourier 展开較为便利。因为所求的 Green 函数应該适合边界条件(16.2)，所以取本征函数的組合式(10.17′)并設 $l=1$，则得：

$$\delta(x-\xi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x\sin n\pi\xi,\quad 0<x,\ \xi<1, \quad (17.8)$$

代入于

$$\frac{d^2G_1(x,\xi)}{dx^2}=-\delta(x-\xi),\quad 0<x,\ \xi<1 \quad (17.9)$$

的右端，即能求出基本解的 Fourier 的表达式。这就是說，把(17.9)就 x 积

分两次，得到一特解

$$G_1(x,\xi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2}. \tag{17.10}$$

(17.10)是由适合边界条件(16.2)的本征函数所組成的，所以它本身就也适合边界条件

$$G_1(0,\xi)=G_1(1,\xi)=0, \tag{17.11}$$

故此即为第一种 Green 函数。它应該与前面所作过的(16.24)是一致的，实际确是如此：

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2}=\begin{cases}(1-\xi)x, & x\leqslant\xi \text{❶}, \quad (17.12)\\ \xi(1-x), & \xi\leqslant x. \quad (17.12')\end{cases}$$

另外从(17.12)的形状不难看出 Green 函数的互易性(16.20)。

【习題 1】 利用 Fourier 积分試求 $\frac{d^2G_0}{dx^2}-\varkappa^2G_0=-\delta(x-\xi)$的基本解。

解 $G_0(x,\xi)=e^{-\varkappa|x-\xi|}/2\varkappa$.

提　示 从假定(17.2)，则有

$$g(k)=1/(k^2+\varkappa^2),$$

$$G_0(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\varkappa^2}dk.$$

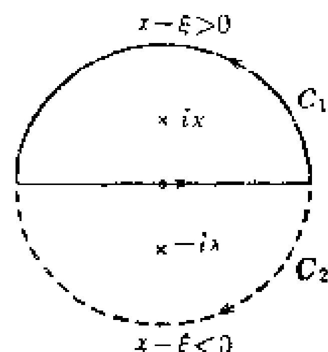


图 17.3

这积分可仿照上文，按$(x-\xi)\gtrless0$，对于图 17.3 的閉曲綫 C_1, C_2 分别取复值积分即可。对 C_1 的場合

$$(\text{Res})_{k=i\varkappa}=\lim_{k\to i\varkappa}(k-i\varkappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\varkappa^2}=\frac{e^{-\varkappa(x-\xi)}}{2i\varkappa},$$

故

$$G_0(x,\xi)=e^{-\varkappa(x-\xi)}/2\varkappa,\quad x-\xi>0.$$

对 C_2 的場合

$$(\text{Res})_{k=-i\varkappa}=\lim_{k\to-i\varkappa}(k+i\varkappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\varkappa^2}=\frac{e^{\varkappa(x-\xi)}}{-2i\varkappa},$$

故

$$G_0(x,\xi)=e^{\varkappa(x-\xi)}/2\varkappa,\quad x-\xi<0.$$

【习題 2】 利用 Fourier 积分試求微分方程 $\frac{d^2G_0}{dx^2}+\varkappa^2G_0=-\delta(x-\xi)$的基本解。

解 $G_0(x,\xi)=ie^{i\varkappa|x-\xi|}/2\varkappa$.

提　示 假定(17.2)，则有 $g(k)=1/(k^2-\varkappa^2)$，

---

❶ 事实上对右端的函数用(0, 1)上的完全正交函数系 $\sin n\pi x$, $n=1,2,3,\cdots$ [在(10.1'')設 $l=1$] 作 Fourier 展开即可。

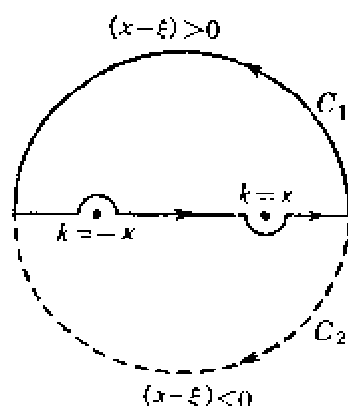


图 17.4

$$G_0(x, \xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2-\varkappa^2}\,dk.$$

仿照上文，按$(x-\xi)\gtrless 0$对于图 17.4 的閉曲綫 C_1，C_2 分別取复値积分計算之即可。对于 C_1 的場合

$$(\mathrm{Res})_{k=\varkappa}=\lim_{k\to\varkappa}(k-\varkappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2-\varkappa^2}=\frac{e^{i\varkappa(x-\xi)}}{2\varkappa},$$

因之 $G_0(x, \xi)=ie^{i\varkappa(x-\xi)}/2\varkappa,\quad (x-\xi)>0,$

同样得到

$$G_0(x, \xi)=ie^{-i\varkappa(x-\xi)}/2\varkappa,\quad (x-\xi)<0.$$

§ 18 伴随偏微分式，广义 Green 公式
（綫性二阶偏微分式）

对于

$$L[u]=A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x, y)u \qquad (18.1)$$

考慮

$$M[v]\equiv\frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2}$$
$$-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv, \qquad (18.2)$$

M 叫做 L 的**伴随微分式**。相反地若求 M 的伴随微分式，則知恰好又得到 L.

对(18.1)乘以 v，减去(18.2)乘以 u，則得

$$vL[u]-uM[v]\equiv v\{Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu\}$$
$$-u\{(Av)_{xx}+2(Bv)_{xy}+(Cv)_{yy}$$
$$-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv\}, \qquad (18.3)$$

由于关系式

$$Avu_{xx}-u(Av)_{xx}=(Avu_x-u(Av)_x)_x,$$

$$Cvu_{yy}-u(Cv)_{yy}=(Cvu_y-u(Cv)_y)_y,$$

$$2\{Bvu_{xy}-u(Bv)_{xy}\}=(Bvu_y-u(Bv)_y)_x+(Bvu_x-u(Bv)_x)_y,$$

$$Dvu_x-u(-Dv)_x=(Duv)_x,$$

$$Evu_y-u(-Ev)_y=(Euv)_y$$

(18.3)能写成把两个表达式

$$P=v\{Au_x+Bu_y\}-u\{(Av)_x+(Bv)_y\}+Duv$$
$$=A(vu_x-uv_x)+B(vu_y-uv_y)+(D-A_x-B_y)uv, \quad (18.4)$$

及

$$Q=v\{Bu_x+Cu_y\}-u\{(Bv)_x+(Cv)_y\}+Euv$$
$$=B(vu_x-uv_x)+C(vu_y-uv_y)+(E-B_x-C_y)uv \quad (18.5)$$

分别对 x 及 y 微分而得的偏导数之和

$$vL[u]-uM[v]=P_x+Q_y. \quad (18.6)$$

对于 x, y 平面上的区域 $\boldsymbol{D}$ 分别积分 P_x, Q_y, 根据 Gauss 公式，結果可得：

$$\iint_D (P_x+Q_y)\,dx\,dy=\oint_C (P\,dy-Q\,dx)$$
$$=\oint_C (Px_n+Qy_n)\,ds. \quad (18.7)$$

等式的右端表示綫积分。(x_n, y_n) 表示 $\boldsymbol{C}$ 上各点的外法綫的方向余弦 $x_n=\cos(n, x)$, $y_n=\cos(n, y)$. 从而得到关于(18.6)在区域 $\boldsymbol{D}$ 上的二重积分表示为綫积分的一般公式

$$\iint_D (vL[u]-uM[v])\,dx\,dy=\oint_C (P\,dy-Q\,dx)$$
$$=\oint_C (Px_n+Qy_n)\,ds. \quad (18.8)$$

(18.8)叫做**广义 Green 公式**。这是把周知的 Green 公式

$$\iint_D (v\Delta_{(2)}u-u\Delta_{(2)}v)\,dx\,dy=\oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds \quad (18.9)$$

一般化了的公式，当 $A=C=1$, $B=D=E=F=0$ 时 (18.8) 即成 (18.9)。

当 $L[u]$ 等于它的伴随式 $M[u]$ 时，$L[u]$ 叫做**自伴式**。作 $L[u]$ 与 $M[u]$ 之差，再就 u, u_x, u_y 之項整理則其系数分別为

$$A_{xx}+2B_{xy}+C_{yy}-D_x-E_y,\quad 2\{A_x+B_y-D\},\quad 2\{B_x+C_y-E\},\tag{18.10}$$

并根据自伴性知道，(18.10)的后二式必須等于 0，于是

$$D=A_x+B_y,\qquad E=B_x+C_y.\tag{18.11}$$

相反，如果这个条件成立的話，則(18.10)的第一式自然也等于 0，故此(18.11)就是(18.1)的 $L[u]$ 成为自伴式的充要条件。

由此可見，把(18.11)代入于(18.1)就得出最一般的自伴式

$$\begin{aligned}L^*[u]&=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\\&\quad+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+Fu\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Fu.\end{aligned}\tag{18.12}$$

这时(18.4)，(18.5)的 P, Q 是由

$$\left.\begin{aligned}P&=v(Au_x+Bu_y)-u(Av_x+Bv_y),\\Q&=v(Bu_x+Cu_y)-u(Bv_x+Cv_y)\end{aligned}\right\}\tag{18.13}$$

給出的，因此可知，把 (18.12)，(18.13) 代入于 (18.8) 后，广义 Green 公式成为

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D(vL^*[u]-uL^*[v])\,dx\,dy\\&\quad=\oint_C[\{v(Au_x+Bu_y)-u(Av_x+Bv_y)\}dy\\&\qquad-\{v(Bu_x+Cu_y)-u(Bv_x+Cv_y)\}dx].\end{aligned}\tag{18.14}$$

特别对于椭圆型的情形，标准化之后，根据(3.12)选取

$$A=C=1,\quad B=0 \tag{18.15}$$

也不失一般性。这时

$$L[u]\equiv u_{xx}+u_{yy}+Fu, \tag{18.16}$$

而广义 Green 公式(18.14)成为

$$\iint_D (vL[u]-uL[v])\,dx\,dy$$

$$=\oint_C\{(vu_x-uv_x)dy-(vu_y-uv_y)dx\}$$

$$=\oint(vu_n-uv_n)ds. \tag{18.17}$$

利用广义 Green 公式(18.17)，将在§19中导出具有一般性的结果。即自伴椭圆型方程的解在二維区域 $\boldsymbol{D}$ 的内点所取的值，可由在 $\boldsymbol{D}$ 的边界 $\boldsymbol{C}$ 上的值而确定。

§19 关于偏微分方程的 Green 函数

考察自伴偏微分算子 L 的偏微分方程

$$L[u]=-f(x,y), \tag{19.1}$$

先求(19.1)的基本解，即偏微分方程

$$L[G(x,y;\xi,\eta)]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{19.2}$$

的解，为了书写方便起見，把 (x,y)，(ξ,η) 分别記为 P，Q，这么(19.1)，(19.2)就可写成

$$L[u(P)]=-f(P), \tag{19.1a}$$

$$L[G(P,Q)]=-\delta(P,Q). \tag{19.2a}$$

对广义 Green 公式(18.17)中的 u，代以(19.1a)的解 $u(P)$，对 v 代以(19.2a)的解 $G(P,Q)$，即得

$$
-\iint_D G(P,\,Q)f(P)d\sigma_P+\iint_D u(P)\delta(P,\,Q)d\sigma_P
$$

$$
=\oint_C\left\{G(C,\,Q)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-u(C)\,\frac{\partial G(C,\,Q)}{\partial n_C}\right\}ds_C. \quad (19.3)
$$

此地 $d\sigma_P$ 意味着 $d\sigma_P=dx\,dy$.

根据 δ 函数的性质

$$
\iint_D f(P)\delta(P,\,Q)\,d\sigma_P=\begin{cases}0, & Q\overline{\in}\boldsymbol{D},\\ f(Q), & Q\in\boldsymbol{D},\end{cases} \quad (19.4)
$$

(19.3) 可变为

$$
\left.\begin{array}{l}Q\overline{\in}\boldsymbol{D}:0\\ Q\in\boldsymbol{D}:u(Q)\end{array}\right\}=\iint_D G(P,\,Q)f(P)d\sigma_P
$$

$$
+\oint_C\left\{G(C,\,Q)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-u(C)\,\frac{\partial G(C,\,Q)}{\partial n_C}\right\}ds_C. \quad (19.5)
$$

把 P, Q 的位置对调，則有

$$
\left.\begin{array}{l}P\overline{\in}\boldsymbol{D}:0\\ P\in\boldsymbol{D}:u(P)\end{array}\right\}=\iint_D G(Q,\,P)f(Q)d\sigma_Q
$$

$$
+\oint_C\left\{G(C,\,P)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-\frac{\partial G(C,\,P)}{\partial n_C}\,u(C)\right\}ds_C.
$$

或利用 §21 中将要証明的 Green 函数的互易性

$$
G(P,\,Q)=G(Q,\,P) \quad (19.6)
$$

可改写为

$$
\left.\begin{array}{l}P\overline{\in}\boldsymbol{D}:0\\ P\in\boldsymbol{D}:u(P)\end{array}\right\}=\iint_D G(P,\,Q)f(Q)d\sigma_Q
$$

$$
+\oint_C\left\{G(P,\,C)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-\frac{\partial G(P,\,C)}{\partial n_C}\,u(C)\right\}ds_C. \quad (19.7)
$$

特别当 (19.1) 的右端恒等于 0 时，即当 u 是齐次偏微分方程

$$
L[u]=0 \quad (19.8)
$$

的解时，則 (19.7) 成为

$$\left.\begin{array}{l} P\overline{\in}\boldsymbol{D}:0 \\ P\in\boldsymbol{D}:u(P) \end{array}\right\}=\oint_{\boldsymbol{C}}\left\{G(P,C)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-\frac{\partial G(P,C)}{\partial n_C}u(C)\right\}ds_C. \tag{19.9}$$

由(19.9)可知,"u 在 $\boldsymbol{D}$ 的内点 P 的值 $u(P)$,与在 $\boldsymbol{D}$ 的边界 $\boldsymbol{C}$ 上的值 $u(C)$ 及 $\partial u(C)/\partial n_C$ 之間是按照这种关系联系着的"。

基本解既然是作为非齐次方程(19.2a)的解而定义的,那么从綫性方程的一般結論,对应的齐次方程,即(19.8)的解必有不确定性,于是利用这个不确定性就能选取在边界 $\boldsymbol{C}$ 上适合一个边界条件的解。适合第一种边界条件

$$G_1(C,Q)=0,\quad C\in\boldsymbol{C} \tag{19.10}$$

的解,称为**第一种 Green 函数**,或单称 **Green 函数**,适合第二种边界条件

$$\frac{\partial G_2}{\partial n_C}(C,Q)=0,\quad C\in\boldsymbol{C} \tag{19.11}$$

的解,称为**第二种 Green 函数**或 **Neumann 函数**,同样,**第三种 Green 函数(Robin 函数)**是作为适合

$$\alpha(C)\frac{\partial G_3}{\partial n_C}(C,Q)+\beta(C)G_3(C,Q)=0,\quad C\in\boldsymbol{C} \tag{19.12}$$

的 G_3 而定义的。

这样选定了 G 后,就容易导出关于(19.1)的种种边界值問题的求解公式。特别在齐次方程(19.8)的情形,对(19.9)考虑第一种 Green 函数所适合的边界条件(19.10),则有

$$\begin{aligned} u(P)&=-\oint_{\boldsymbol{C}}\frac{\partial G_1(C,P)}{\partial n_C}u(C)ds_C \\ &=-\oint_{\boldsymbol{C}}\frac{\partial G_1(P,C)}{\partial n_C}u(C)ds_C, \end{aligned} \tag{19.13}$$

又如考虑第二种的条件,则有

$$u(P)=\oint_C G_2(C, P)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}ds_C$$

$$=\oint_C G_2(P, C)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}ds_C. \qquad (19.14)$$

从这些式子的形状来看，(19.13) 意味着 (19.8) 的解在 $\boldsymbol{D}$ 的内点的值，是从第一种 Green 函数 G_1 及由边界值 $u(C)$而确定的；同样(19.14)的意义是由边界值的法綫导数值 $\partial u(C)/\partial n_C$ 能够决定内点的函数值。实际上，(19.13)、(19.14)是解决椭圆型方程与抛物型方程的第一种或第二种边界值問題的关鍵。决定 Green 函数的問題，它本身就是一个边界值問題，不过边界值如 (19.10)～(19.12)一样，是齐次的，因而比較簡单。假定 Green 函数已經求出，利用(19.13)能够証明：由

$$u(P)=-\oint_C \frac{\partial G_1(P, C)}{\partial n_C}g(C)ds_C \qquad (19.15)$$

所給出的式子就成为适合下列第一种边界条件

$$\lim_{P\to C}u(P)=g(C), \quad C\in\boldsymbol{C} \qquad (19.16)$$

的偏微分方程(19.8)的解，也就是对于(19.8)的 Dirichlet 問題的解。另外，只要这里的 P 是 $\boldsymbol{D}$ 的内点，則 u 是适合(19.8)的，因为 $G_1(P, C)$适合方程(19.2a)，所以对于$\boldsymbol{D}$的内点P必有 $L[G]=0$. 因此使 L 作用于(19.15)，就能推断 u 是 (19.8) 的解，至于 u 在边界 $\boldsymbol{C}$ 上的点 C 处恰好取边界值 $g(C)$ 这一事实(严格証明甚难)，当 G 为 (19.2a)的解时是普遍成立的。因为若在关系式(19.9)中令 $G=G_1$，則由边界条件(19.10)可得(19.13)，因此当 $P\to C'$，$C'\in\boldsymbol{C}$时，成立着关系式

$$u(C')=-\oint_C u(C)\frac{\partial G_1(C', C)}{\partial n_C}ds_C.$$

这式表明：在 $\boldsymbol{C}$ 上 $-\partial G_1(C', C)/\partial n_C$ 具有 δ 函数的性质。从而在(19.15)中若使 $P\to C'$，$C'\in\boldsymbol{C}$，則有

$$\lim_{P\to C'} u(P)=\oint_C \delta(C'-C)g(C)ds_C=g(C'), \qquad (19.17)$$

即(19.13)取指定的边界值。

完全同样可証

$$u(P)=\oint_C G_2(P, C)N(C)ds_C \qquad (19.18)$$

是适合第二种边界条件

$$\lim_{P\to C} \frac{\partial u(P)}{\partial n}=N(C), \quad C\in \boldsymbol{C} \qquad (19.19)$$

的偏微分方程(19.8)的解,就是 Neumann 問題的解。

若代替齐次方程(19.8),考虑非齐次方程(19.1)并設边界条件是齐次的

$$u(C)=0, \quad C\in \boldsymbol{C}, \qquad (19.20)$$

或

$$\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}=0, \quad C\in \boldsymbol{C}, \qquad (19.20')$$

或是更一般地,第三种齐次条件

$$\alpha(C)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}+\beta(C)u(C)=0, \quad C\in \boldsymbol{C}, \qquad (19.20'')$$

这时,对应(19.20)~(19.20″)各条件,使用(19.10)~(19.12)各种 Green 函数,就知道解可以表示为

$$u(P)=\iint_D G(P, Q)f(Q)d\sigma_Q. \qquad (19.21)$$

这是因为,不論对哪一种情形若用(19.7)根据边界条件,就能使(19.7)右端的第二积分(綫积分)消失,結果得到关系(19.21)。反之,能够直接証明(19.21)适合所給的偏微分方程以及边界条件。

这时只要是 $P\in \boldsymbol{C}$,根据(19.2a)即知

$$L[u(P)]=\iint_D L_P[G(P, Q)]f(Q)d\sigma_Q$$

$$=-\iint_D \delta(P, Q)f(Q)d\sigma_Q=-f(P),$$

这就是說(19.1)成立. 至于适合边界条件这一事实，由于通过各种 Green 函数所适合的 (19.10)～(19.12) 就把它的特性傳递給 (19.21)所定义的 $u(P)$.

定理与問題

(1) 齐次方程(19.8)的适合第三种边界条件

$$\alpha(C)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}+\beta(C)u(C)=F(C),\quad C\in C \tag{a}$$

的解，可用第三种 Green 函数(Robin 函数)(19.20″)給成下式

$$u(P)=\oint_C G(P,C)\frac{F(C)}{\alpha(C)}ds_C=-\oint_C\frac{\partial G(P,C)}{\partial n_C}\frac{F(C)}{\beta(C)}ds_C. \tag{b}$$

第一式当 $\beta(C)=0$ 时，与 (19.18) 一致，第二式当 $\alpha(C)=0$ 时成为 (19.15)，試証明之！又如把这个定理扩充于三維将如何？

提　示　对于(19.8)的解(19.9)，利用(19.12)消去 $\partial G_3/\partial n$，則得

$$u(P)=\oint_C G(P,C)\left\{\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}+\frac{\beta(C)}{\alpha(C)}u(C)\right\}ds_C,$$

又如消去 G_3 則得

$$u(P)=-\oint_C\frac{\partial G(P,C)}{\partial n_C}\left\{\frac{\alpha(C)}{\beta(C)}\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}+u(C)\right\}ds_C.$$

三維的扩充成立。

(2) 由于 Dirichlet 問題的解的公式(19.15)所暗示，若設

$$u(P)=\oint_C\Gamma_1(P,C)g(C)ds_C\quad(C\in C) \tag{c}$$

并将此式視为内点的值与边界上的值由 Γ_1 所建立的对应。証明(c)成为 Dirichlet 問題:

$$L[u]=0,\quad u(C)=g(C),\quad C\in C \tag{d}$$

的解的条件是

$$\left.\begin{array}{ll}1^\circ & L_P[\Gamma_1(P,C)]=0,\\ 2^\circ & \Gamma_1(C,C')=\delta(C,C'),\quad C,\ C'\in C.\end{array}\right\} \tag{e}$$

并把这定理扩充于三維。

提　示　为了使(c)适合 $L[u]=0$ 則出現 1°. 为了使 $P\to C'$, $C'\in C$ 时 $u(C')\to g(C')$，由 $g(C')=\oint_C\Gamma_1(C',C)g(C)ds_C$ 出現 2°. 三維的扩充也一样地作。

(3) 由 Neumann 問題中的 Neumann 函数 G_2 所表示的公式(19.18) 若設

$$u(P)=\oint_C \Gamma_2(P,\ C)N(C)ds_C, \tag{f}$$

証明(f)成为 Neumann 問題:

$$L[u]=0,\ \frac{\partial u}{\partial n_C}(C)=N(C),\quad C\in \boldsymbol{C} \tag{g}$$

之解的条件是

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & L_P[\Gamma_2(P,\ C)]=0, \\ 2^\circ & \dfrac{\partial \Gamma_2(C,\ C')}{\partial n_C}=\delta(C,\ C'),\quad C,\ C'\in \boldsymbol{C}. \end{array}\right\} \tag{h}$$

并将定理对三維扩充。

提　示　当 $P\to C'$, $C'\in \boldsymbol{C}$ 时，为了 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(C')\to N(C')$ 而有

$$g(C')=\oint_C \frac{\partial \Gamma_2(C',\ C)}{\partial n_{C'}}g(C)ds_C,$$

由此出现 2°.

§20 Laplace 方程的基本解

如在 §19 所見，偏微分方程的边界值問題归結于求 Green 函数的問題。而求 Green 函数的第一步是求一个基本解的問題。作为求基本解的方法是計算 Fourier 积分。如在 §17 所見，这种方法也适用于解偏微分方程的一般場合。現在即以这种方法求 Laplace 方程的基本解。

1) 三維 Laplace 方程的基本解　为了求

$$\Delta G(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta) \tag{20.1}$$

的基本解可以反复使用(11.4)，应用积分公式

$$\delta(x-\xi)\,\delta\,(y-\eta)\,\delta\,(z-\zeta)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta))}dk_x dk_y dk_z, \tag{20.2}$$

与此相应，并假定

$$G_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta))} dk_x dk_y dk_z. \quad (20.3)$$

将这些代入(20.1)比較其相当項，即得

$$g(k_x, k_y, k_z) = 1/(k_x^2+k_y^2+k_z^2), \quad (20.4)$$

再把它代入(20.3)，即得

$$G_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta))}}{k_x^2+k_y^2+k_z^2} dk_x dk_y dk_z. \quad (20.5)$$

为了計算(20.5)的积分，导入在 k 空間的球面坐标

$$k_x = k \sin\alpha \cos\beta, \quad k_y = k \sin\alpha \sin\beta, \quad k_z = k \cos\alpha, \quad (20.6)$$

于是

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2 = k^2, \quad dk_x dk_y dk_z = k^2 dk \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta, \quad (20.7)$$

另一方面，在坐标空間也导入如

$$x-\xi = -R\sin\theta\cos\varphi, \quad y-\eta = -R\sin\theta\sin\varphi, \quad z-\zeta = -R\cos\theta \quad (20.8)$$

之球面坐标，就有

$$k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)$$

$$= -kR\{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\},$$

若設 (θ, φ) 方向与 (α, β) 方向所夹之角为 ω，則

$$= -kR\cos\omega. \quad (20.9)$$

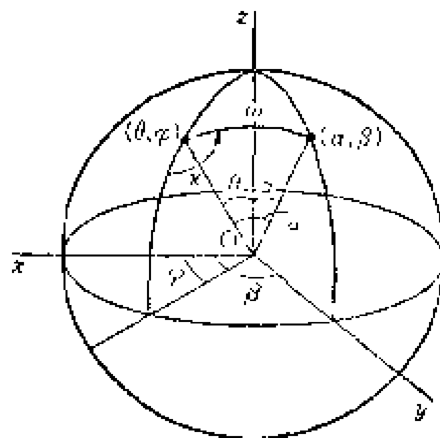


图 20.1

代替 k 空間中的角变数 (α, β)，把 (θ, φ) 方向选为新极的方向，把 ω, χ 选为新天頂角及方位角，这么立体角 $\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$ 在新变数之下就等于 $\sin\omega\, d\omega\, d\chi$，因之

$$I=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta))}}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}dk_x dk_y dk_z$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikR(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta))}dk\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}dk\sin\omega\, d\omega\, d\chi$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}dk\int_0^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}\sin\omega\, d\omega, \tag{20.10}$$

然而

$$\int_0^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}\sin\omega\, d\omega=\int_{-1}^{1}e^{ikRx}dx=\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{ikR}=2\frac{\sin kR}{kR},$$

$$\therefore\quad I=\frac{4\pi}{R}\int_0^{\infty}\frac{\sin(kR)}{k}dk=\frac{4\pi}{R}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{2\pi^2}{R}.$$

故

$$G_0(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R},\ R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \tag{20.11}$$

就是所求的基本解。

2) 二維 Laplace 方程的基本解

$$\Delta^{(2)}G(x,y;\xi,\eta)=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \tag{20.12}$$

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta))}dk_x dk_y, \tag{20.13}$$

假定

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y)e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta))}dk_x dk_y, \tag{20.14}$$

并代入于(20.12)，与1)同样,相当于(20.5)的是

$$G_0(x,y;\xi;\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta))}}{k_x^2+k_y^2}dk_x dk_y. \tag{20.15}$$

若导入极坐标

$$k_x=k\cos\alpha,\quad k_y=k\sin\alpha,$$

$$x-\xi=-R\cos\varphi,\quad y-\eta=-R\sin\varphi$$

加以变形,则与(20.10)对应的有

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikR\cos(\varphi-\alpha)}}{k}dk\,d\rho. \tag{20.16}$$

利用 Bessel 函数的积分表达式

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos x}dx, \tag{20.17}$$

可得

$$G_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{k} dk. \tag{20.18}$$

(20.18) 的积分因为在 $k\sim 0$ 的邻域有不正则性而发散，但由此减去一个（无限大的）常数 $\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(k)}{k} dk$ 而得的

$$G_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(kR) - J_0(k)}{k} dk \tag{20.19}$$

则为有限的，因此作为我們的基本解可选取

$$G_0(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(kR) - J_0(k)}{k} dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\int_1^R \frac{dJ_0(kR)}{dR} dR, \tag{20.20}$$

$$\frac{dG_0(R)}{dR} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\partial J_0(kR)}{\partial R}\frac{dk}{k}$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{dJ_0(\rho)}{d\rho} d\rho = -\frac{1}{2\pi R}. \tag{20.21}$$

就 R 积分之則得

$$G_0(R) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R} + \text{常数}。$$

从(20.20)可知 $G_0(1)=0$，故此常数等于 0．于是

$$G_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \tag{20.22}$$

定理与問題

(1) 試用把体积分改成曲面积分的 Green 定理証明下列公式：

$$\iiint_V f(P)\Delta_P\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}}\right)d\tau_P = \begin{cases} 0, & Q\bar{\in} V, \quad (a.1) \\ f(Q), & Q\in V. \quad (a.2)\end{cases}$$

把上面的公式与 δ 函数的性质

$$\iiint_V f(P)\delta(P, Q)d\tau_P = \begin{cases} 0, & Q\bar{\in} V, \quad (b.1) \\ f(Q), & Q\in V \quad (b.2)\end{cases}$$

对比，即知

$$\Delta_P\left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right) = -\delta(P, Q). \tag{c}$$

从而可得 $G_0(P, Q) = 1/4\pi r_{PQ}$．它是三維 Laplace 方程的基本解与 (20.11) 的結果符合。

提 示 当 $P \neq Q$ 时 $\Delta_P\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)=0$，因此(a)之积分仅当 P 与 Q 一致时，才不等于 0. 这說明(a.1)正确. 所以，若以点 Q 为中心的小球記作 K,

$$\iiint\limits_V \Delta_P\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)d\tau_P=\iiint\limits_K \Delta_P\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)d\tau_P=\iint\limits_{S_K}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{SP}}\right)d\sigma_S,$$

这里面的 S_K 表示圍繞 Q 的小球的表面。在 S_K 上 $d\sigma_S=r^2d\Omega$, $\partial/\partial n=\partial/\partial r$, 因而

$$\iint\limits_{S_K}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{SQ}}\right)d\sigma_S=\iint\limits_{S_K}-\frac{1}{r^2}\,r^2d\Omega=-4\pi,$$

由此可得

$$\iiint\limits_V \Delta_P\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}}\right)d\tau_P=1,\quad Q\in V,$$

由此可导出(a.2)之关系。

(2) (1)的二維情形如下:

$$\iint\limits_D f(P)\Delta_P^{(2)}\left\{\frac{-1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\right\}=\begin{cases}0, & Q\bar{\in} V, & (d.1)\\ f(Q), & Q\in V. & (d.2)\end{cases}$$

使之与 δ 函数的性质

$$\iint\limits_D f(P)\,\delta(P,Q)d\sigma_P=\begin{cases}0, & Q\bar{\in} V, & (e.1)\\ 1, & Q\in V & (e.2)\end{cases}$$

对比，即得

$$\Delta_P^{(2)}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{PQ}}\right)=-\delta(P,Q),\tag{f}$$

由此可知存在着与(20.22)一致的基本解。

提 示 关于(d.1)可与(1)完全平行地考虑。对于以点 Q 为中心的小圆 K，引用二維的 Green 定理，就有

$$\iint\limits_K \Delta_P^{(2)}\left(\log\frac{1}{r_{PQ}}\right)d\sigma_P=\oint_{C_K}\frac{\partial}{\partial n_C}\left(\log\frac{1}{r_{CQ}}\right)ds_C.$$

在圓周 C_K 上 $ds_C=rd\varphi$, $\partial/\partial n=\partial/\partial r$, 因而

$$\oint_{C_K}\frac{\partial}{\partial n_C}\left\{\log\left(\frac{1}{r_{CQ}}\right)\right\}ds_C=-\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\,rd\varphi=-2\pi.$$

以下同于(1).

(3) 当 u 为二維 Poisson 方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-f(x,y)$ 之解时，証明

$$\left.\begin{array}{l}P\overline{\in}D:\ 0\\ P\in D:\ u(P)\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}\iint_D f(Q)\log\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)d\sigma_Q$$

$$+\frac{1}{2\pi}\oint_C\left\{\log\left(\frac{1}{r_{PC}}\right)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PC}}\right)}{\partial n_C}u(C)\right\}ds_C.$$

对于 Laplace 方程的情形，$f(x,y)\equiv 0$，因而

$$\left.\begin{array}{l}P\overline{\in}D:\ 0\\ P\in D:\ u(P)\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left\{\log\left(\frac{1}{r_{PC}}\right)\frac{\partial u(C)}{\partial n_C}-\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PC}}\right)}{\partial n_C}u(C)\right\}ds_C$$

成立。

提　示　向(19.7)的 G 代入 $G_0(P,Q)=\dfrac{1}{2\pi}\log\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right)$.

(4) 証明(3)的三維的扩充是

$$\left.\begin{array}{l}P\overline{\in}V:\ 0\\ P\in V:\ u(P)\end{array}\right\}=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{f(Q)}{r_{PQ}}d\tau_Q$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r_{PS}}\frac{\partial u(S)}{\partial n_S}-\frac{\partial}{\partial n_S}\left(\frac{1}{r_{PS}}\right)u(S)\right\}d\sigma_S.$$

§21　伴随 Green 函数，互易性

对于自伴偏微分方程的边値問題，在§19中已經讲过 Green 函数 G 所起的重要作用。但是在本节(§21)中則不限于自伴型，因此就要考虑伴随 Green 函数的作用。

設 $L[u]$ 是由(18.1)給出的一般綫性二阶偏微分式，利用(18.1)的伴随偏微分式(18.2)，能写出下列的偏微分方程：

$$M[H(x,y;\xi,\eta)]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\qquad(21.1)$$

并适当地选取 H 的边界值。若在广义 Green 公式(18.6)中令

$$u=G(x,y;\xi,\eta),\quad v=H(x,y;\xi,\eta)$$

則可以得到右端綫积分为0的情形，这时卽称 H 是对于 G 的**伴随 Green 函数**。

例如就热傳导方程的例子而言,即(18.1)当

$$A=1,\quad B=C=D=0,\quad E=-1,\quad F=0 \tag{21.2}$$

的特殊場合,对于

$$L[u]=\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{21.3}$$

L 的作随式 M 是由

$$M[v]=\varkappa^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial t} \tag{21.4}$$

給出的。

把(21.2)的假定代入(18.4),(18.5)中,則得

$$P=\varkappa^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad Q=-uv, \tag{21.5}$$

在这种情况下广义 Green 公式是

$$\iint_D\{vL[u]-uM[v]\}\,dx\,dt=\oint_C\left\{\varkappa^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt+uv\,dx\right\}. \tag{21.6}$$

从而若在 C 上消失的,方程

$$M[H(x,t;\xi,\tau)]\equiv\varkappa^2\frac{\partial^2 H(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial H(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}$$

$$=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{21.7}$$

的解为 H,则 H 成为在同一 C 上的第一种 Green 函数 G 的伴随 Green 函数。

关于相互处于伴随关系的两 Green 函数 G, H,一般調換其主变数 x, y 与副变数 ξ, η,則有下面的关系成立:

$$G(x,y;\xi,\eta)=H(\xi,\eta;x,y), \tag{21.8}$$

这叫做伴随 Green 函数的**互易关系**。在广义 Green 公式(18.8)中令 $u=G(x,y;\xi_1,\eta_1)$, $v=H(x,y;\xi_2,\eta_2)$,并考虑到綫积分成0之性质,則有

$$\iint_D\{H(x,y;\xi_2,\eta_2)L[G(x,y;\xi_1,\eta_1)]$$

$$-G(x,y;\xi_1,\eta_1)M[H(x,y;\xi_2,\eta_2)]\}\,dx\,dy=0. \tag{21.9}$$

根据定义，G 是

$$L[G(x, y; \xi, \eta)] = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \qquad (21.10)$$

的解，因 H 适合(21.1)，故(21.9)成为

$$\iint_D H(x, y; \xi_2, \eta_2)\delta(x, y; \xi_1, \eta_1)dx\,dy$$

$$= \iint_D G(x, y; \xi_1, \eta_1)\delta(x, y; \xi_2, \eta_2)dx\,dy.$$

由 δ 函数的基本性质(19.4)可知，当 (ξ_1, η_1)，(ξ_2, η_2) 为 $\boldsymbol{D}$ 的任意两个内点时，关系式

$$H(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = G(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1)$$

成立。这就是互易关系(21.8)。或簡单写成

$$G(P, Q) = H(Q, P). \qquad (21.11)$$

互易性也可以这样說，"如果調换主变数 P 与副变数 Q，則 Green 函数变为伴随 Green 函数"。

特别在自伴的場合，因为 $G=H$，故

$$G(P, Q) = G(Q, P), \qquad (21.12)$$

"这是自伴情况的 Green 函数的互易关系"。

§22 一維波动方程的基本解

試求波动方程的基本解，即求偏微分方程

$$L[G] \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \qquad (22.1)$$

的解 $G(x, t; \xi, \tau)$ 的問題。先考虑无限的場合，使用

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}dk, \qquad (22.2)$$

进一步对时間項也使用

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega, \qquad (22.3)$$

并假定

$$G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} g_0(k,\ \omega)\,e^{i(k(x-\xi)-\omega(t-\tau))}\,dk\,d\omega, \tag{22.4}$$

代入于(22.1)，然后比較被积函数即可得到

$$g_0(k,\ \omega)=-\frac{1}{(\omega/c)^2-k^2}. \tag{22.5}$$

因而

$$\left.\begin{aligned} G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)&=-\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}dk\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega,\\ \omega_0&=kc. \end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

我們首先考虑积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega=\frac{1}{4\pi\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega-\omega_0}-\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega+\omega_0}\right)d\omega. \tag{22.7}$$

积分在积分路綫上有极点，所以原来的积分是沒有意义的。但如考虑在 ω 复平面上适当避开极点的复値积分的极限，就能获得有意义的积分。可是避开极点的方法共有四种，今取如图 22.1 的办法。結果为

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega$$

$$=\begin{cases}0, & t<\tau, \qquad (22.8)\\ \dfrac{-\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0} & \tau<t. \qquad (22.8')\end{cases}$$

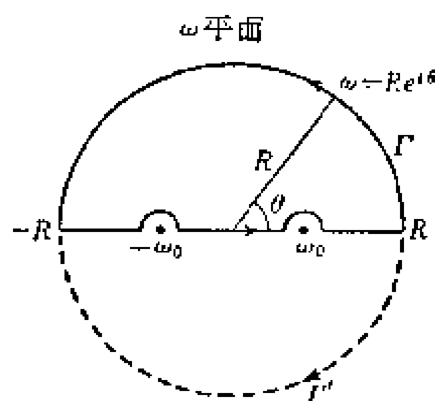


图 22.1

由此可知，(22.6)的解具有这样的物理意义："于时刻 τ 之前 $t<\tau$ 一直持續寂靜，从时刻 τ 起出現波动"。(22.8) 的积分利用关于复値积分的殘数定理不难算出。这就是在 ω 复平面上如图 22.1 从 $-R$ 到 R 那样的路綫与上半平面上以半徑为 R 的半圓周 Γ 銜接而成的封閉曲綫 $\boldsymbol{C}$，使用殘数定理，由于在 $\boldsymbol{C}$ 的內部函数到处正則，从而

$$\int_{C}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega=0.$$

然在 ω 上半面 $\Im(\omega)>0$，如令 $\omega=Re^{i\theta}$，$0<\theta<\pi$，因而

$$e^{-i\omega(t-\tau)}=e^{R(t-\tau)\sin\theta}\cdot e^{-iR(t-\tau)\cos\theta}.$$

若 $t<\tau$，在 Γ 上随同 $R\to\infty$ 积分值收斂于 0. 当 $R\to\infty$ 时，$(-R, R)$ 之部分成为(22.8)的 I，但此等于 0，由此可見(22.8)成立。

当 $\tau<t$ 时，因为 Γ 上的积分发散，故选取下半平面半徑为 R 的半圓 Γ' 与积分路綫 $(-R,R)$ 补接而成的封閉曲綫 C'，然后用殘数定理，即得

$$\int_{C'} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\, d\omega = -2\pi i\,\{\mathrm{Res}(\omega_0)+\mathrm{Res}(-\omega_0)\}\,❶,$$

其中 $\mathrm{Res}\,(\omega_0)$，$\mathrm{Res}\,(-\omega_0)$ 表示在被积函数的极点 $\omega=\pm\omega_0$ 处的殘数，此时两个极点都是一阶的，故

$$\mathrm{Res}(\omega_0)=\lim_{\omega\to\omega_0}(\omega-\omega_0)\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}=e^{-i\omega_0(t-\tau)}/(2\omega_0),$$

$$\mathrm{Res}(-\omega_0)=e^{i\omega_0(t-\tau)}/(-2\omega_0).$$

另一方面，与前同样可推得在 Γ' 上 $e^{-i\omega(t-\tau)}$ 的絕对值为 $e^{R(t-\tau)\sin\theta}$，由于在 Γ' 上 $\sin\theta<0$，当 $\tau<t$ 时，Γ' 上的积分收斂于 0. 从而当 $R\to\infty$ 时的极限是

$$I=\frac{1}{2\omega_0}i\,\{e^{i\omega_0(t-\tau)}-e^{i\omega_0(t-\tau)}\}=-\frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0},$$

于是得到(22.8′)的結果。

把(22.8)代入于(22.6)，注意 $\omega_0=kc$，計算之即得

$$G(x,t;\xi;\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (22.9)\\ \dfrac{c}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\frac{\sin kc(t-\tau)}{k}\,dk, & \tau<t. \quad (22.9')\end{cases}$$

但是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\frac{\sin kc(t-\tau)}{k}\,dk=\int_0^{\infty}\frac{\sin k\{c(t-\tau)+(x-\xi)\}}{k}\,dk$$
$$+\int_0^{\infty}\frac{\sin k\{c(t-\tau)-(x-\xi)\}}{k}\,dk, \qquad (22.10)$$

并注意 Dirichlet 的积分公式

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda k}{k}\,dk=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \lambda<0,\end{cases} \qquad (22.11)$$

这么，(22.10) 的第一項积分，如图 22.2 所示，在与两軸交于 45° 的直綫

---

❶ 因 C' 是負向的积分路綫，故在 $2\pi i$ 之前附以 $-$.

$c(t-\tau)+(x-\xi)=0$ 为分界的上下半平面上分别为 $+\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，同样又第二积分在以 $c(t-\tau)-(x-\xi)=0$ 为分界的上下半平面上分别为 $+\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，因此，整个积分在斜綫区 II 为 0，在 I 为 π，在 III 为 $-\pi$. 目前討論的是(22.9′)的 $\tau<t$ 的情形，因而結果是

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, \begin{cases}t<\tau,\\ \tau<t, \ |x-\xi|>c|t-\tau|,\end{cases} & (22.12)\\ \frac{c}{2}, \ \tau<t, \ |x-\xi|<c|t-\tau|. & (22.12')\end{cases}$$

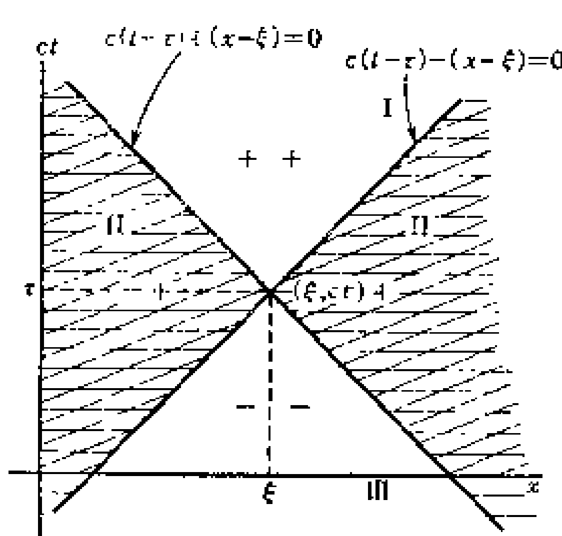


图 22.2

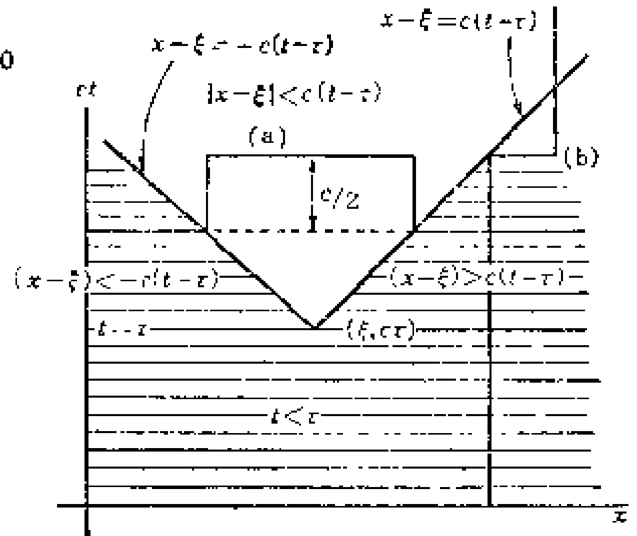


图 22.3

这是所求波动方程的一个基本解，如图 22.3 所示，它具有这样的物理意义："对于过去的时間 $t<\tau$ 全空間是毫无波动的寂靜世界，但在时刻 $t=\tau$ 突然在 $x=\xi$ 处出現点震源，从此以后即产生沿 x 正負两方向的波动傳播"。規定 t 以后，考察积分曲面在 $t=t$ 处的截口，如图 22.3 之(a)那样可知仅在范圍 $|x-\xi|=ct$ 内出現了强度为 $\frac{c}{2}$ 的振动。又如規定 x 之后，考察在 $x=x$ 处的截口，此处一直到时間 $t=\tau+|x-\xi|/c$ 时沒有振动，然后突然出現强度为 $c/2$ 之振动，而且以后振动永远保持同样的强度[图 22.3 之(b)].

由于基本解是非齐次方程(22.1)的解。而对应的齐次方程是

波动方程。从迭加原理可知，任意解的迭加仍是方程的解。故此对于有限区域的边值問題，可以利用解的不定性而求出Green函数。还有其他形状的基本解以及物理上的意义等，将在§28中討論。

§23 热傳导方程的基本解

与§22中波动方程的处理方法大致相同，但是更为簡单，对于

$$L[G(x,\ t;\xi,\ \tau)]\equiv\varkappa^2\frac{\partial^2 G(x,\ t;\xi,\ \tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial t}$$

$$=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{23.1}$$

代入

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\\&\qquad=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k(x-\xi)-\omega(t-\tau)\}}dk\,d\omega,\\&G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\\&\qquad=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}g_0(k,\ \omega)\,e^{i\{k(x-\xi)-\omega(t-\tau)\}}dk\,d\omega,\end{aligned}\right\} \tag{23.2}$$

则得

$$g_0(k,\ \omega)=\frac{-1}{i\omega-(\varkappa k)^2}, \tag{23.3}$$

于是基本解为

$$G_0(x,\ t;\xi,\ \tau)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\varkappa k)^2}d\omega. \tag{23.4}$$

若用残数方法計算积分

$$I(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\varkappa k)^2}d\omega, \tag{23.5}$$

沿半圓 Γ, Γ' 部分的积分的处理与§22类似，当 $t<\tau$ 时，沿 ω 平面上半面的 Γ 的部分收斂于0，当 $t>\tau$ 时，沿下半面 Γ' 的为0．只有 $(-R,\ R)$ 部分的积

分与 §22 的情况不同，这时沿实轴积分之即可，现在极点是 $\omega=-i(\varkappa k)^2$，此点的残数为

$$(\mathrm{Res})_{\omega=-i(\varkappa k)^2}=\lim_{\omega\to -i(\varkappa k)^2}\{\omega+i(\varkappa k)^2\}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\varkappa k)^2}=\frac{e^{-(t-\tau)(\varkappa k)^2}}{i},$$

因而(23.5)为

$$I=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ -2\pi e^{-(t-\tau)(\varkappa k)^2}, & \tau<t.\end{cases}\tag{23.6}$$

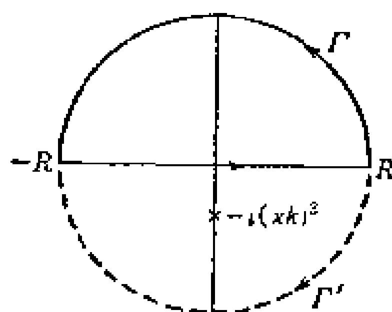


图 23.1

从(23.4)～(23.6)得

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varkappa^2(t-\tau)k^2+i(x-\xi)k}dk, & \tau<t.\end{cases}\tag{23.7}$$

用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2+bk}dk=\frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\sqrt{\pi}$$

得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varkappa^2(t-\tau)k^2+i(x-\xi)k}dk=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

故

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau, & (23.8)\\ \dfrac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}, & \tau<t & (23.8')\end{cases}$$

即为所求的热传导方程的基本解。

对于 $\tau<t$，(23.8′)是(23.1)的齐次方程，即热传导方程本身：

$$\varkappa^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0\tag{23.9}$$

的一个特解❶。此解为

$$V(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}},\tag{23.10}$$

从物理上說，V 表示在时刻 $t=\tau$，置于 $x=\xi$ 处强度为 1 的点热源。实际上，若对 (23.10) 分别以不同的 $t-\tau$ 值繪出曲綫的話，就如图 23.2 那样形成关于 $x=\xi$ 左右对称的曲綫，并且对称点永远在 $x=\xi$ 上。至于曲綫的形态，则随着 $t-\tau$ 的增大逐漸扁平。反之，随着 $t-\tau\to 0$，图形的峰頂在 $x=\xi$ 的附近无限增高，且曲綫在 $x\neq\xi$ 处到处趋近于 0. 但是沿着整个实軸 $(-\infty,\ \infty)$ 对 V 积分的結果为

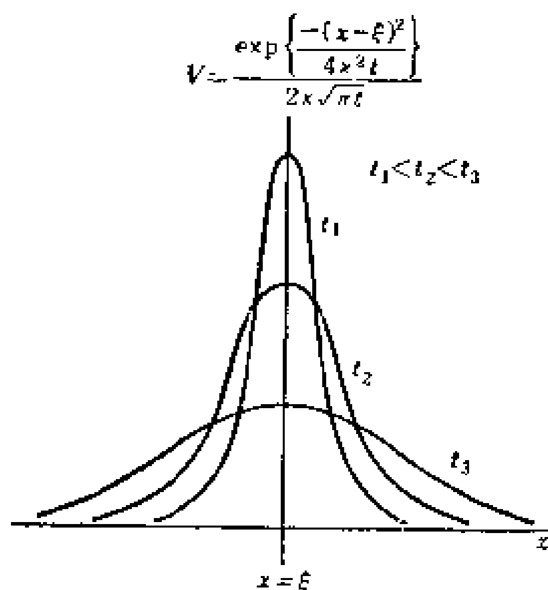


图 23.2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=1.\tag{23.11}$$

由此可見，对于任意的时間，ξ 軸与曲綫 V 包圍的面积，恒等于 1. 即热傳导方程的解在 $t=\tau$ 处有 $\delta(x-\xi)$ 的性质。因此称为点热源。强度所以为 1 的原因，是根据 (23.11) 可以了解，扩散出去的热量（或扩散物质）的总和等于 1.

(23.8) ~ (23.8′) 的 $G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$ 的物理意义是一直到时刻 $t<\tau$，在全空間保持着无温度的状态。但是当 $t=\tau$ 时在 $x=\xi$ 处突然出現强度为 1 的点热源，而且有随同时間而消逝的一种热傳导（物质扩散）現象。

❶ 参照本节最后的习题 1。

【习題1】 对于一維热傳导方程

$$\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{a}$$

試用分离变数法 $u(x, t)=X(x)T(t)$ 求形如

$$u(x, t)=e^{-\varkappa^2k^2t}\cos k(x-\xi) \tag{b}$$

的解。証明对参数 k 积分(b)，可得解

$$u(x, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varkappa^2k^2t}\cos k(x-\xi)dk=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2t}}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}. \tag{c}$$

对出现于(b)的参数 k, ξ, 作二重积分，則得

$$u(x, t)=\int e^{-\varkappa^2k^2t}\,dk\int f(\xi)\cos k(x-\xi)d\xi, \tag{d}$$

u 也是一个解。例如

$$u(x, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varkappa^2k^2t}\,dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(x-\xi)d\xi \tag{e}$$

即(a)之解，而且

$$u(x, 0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(x-\xi)d\xi=f(x),$$

即說明初始值等于 $f(x)$.

§24 关于矩形域的 Green 函数与边界值問題

1) 对于边长分别为 a, b 的矩形的第一种 Green 函数

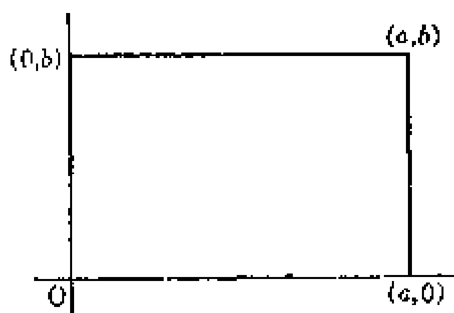


图 24.1

a) 利用二重 Fourier 級数的表示法 对

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_{(2)}G_1(x, y; \xi, \eta)\\&\quad=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\\&0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

利用 (10.17′)，并以在 $x=0$, $x=a$ 处为 0 的 Fourier 級数之形式，写出 $\delta(x-\xi)$，則有

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}; \tag{24.2}$$

同样有

$$\delta(y-\eta)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}. \tag{24.2′}$$

与此相应，用适合于边界条件 $x=0,\ a$；及 $y=0,\ b$ 为 0 的 $\Delta_{(2)}u(x,\ y)=0$ 的本征函数：$\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ 等；作 G_1 的二重 Fourier 級数展开，則有

$$G_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{24.3}$$

把(24.2)～(24.2′)及(24.3)代入于(24.1)，則有

$$\pi^2\sum_{m,n}\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{a}\right)^2\right\}g_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$=\frac{4}{ab}\sum_{m,n}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

由此可得

$$g_{mn}=\frac{4}{\pi^2ab}\,\frac{\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2}, \tag{24.4}$$

所以

$$G_1(x,y;\ \xi,\ \eta)=\frac{4}{\pi^2ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2} \tag{24.5}$$

就是所求的对于矩形域的第一种 Green 函数。

b) 利用单純 Fourier 級数的表示法 于(24.1)，仅注意关于 x 的第一种边界条件

$$G_1(0,\ y)=G_1(a,\ y)=0.$$

并向 $\delta(x-\xi)$ 代入(24.2)，相应地，假設

$$G_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}g_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}, \tag{24.6}$$

然后把(24.2)，(24.6)代入于(24.1)，且比較相当項即得形如(16.29)的常微分方程，

$$\frac{d^2g_n}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2g_n=-\delta(y-\eta). \tag{24.7}$$

与(16.25)同样，解(基本解)的一阶导数在不連續点 $y=\eta$ 有如下的不連續性：

$$\frac{dg_n}{dy}(\eta+0,\ \eta)-\frac{dg_n}{dy}(\eta-0,\ \eta)=1. \tag{24.8}$$

由于在区間两端的齐次边界条件为

$$g_n(0,\ \eta)=0,\quad g_n(b,\ \eta)=0, \tag{24.9}$$

所以可設

$$g_n(y,\eta)=\begin{cases}\gamma_n \sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & 0<y<\eta,\\ \gamma_n \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y), & \eta<y<b,\end{cases} \tag{24.10}$$

并待定 γ_n，使之能符合(24.8)的不連續性：于是

$$\frac{dg_n(\eta-0,\eta)}{dy}-\frac{dg_n(\eta+0,\eta)}{dy}=\frac{n\pi}{a}\gamma_n\{\cosh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta)$$

$$+\sinh(n\pi\eta/a)\cosh(n\pi/a)(b-\eta)\}=\frac{n\pi}{a}\gamma_n\sinh(n\pi b/a)=1,$$

$$\therefore\quad \gamma_n=\frac{a}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}. \tag{24.11}$$

把(24.11)代入(24.10)，則得

$$g_n(y,\eta)=\frac{a}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}\begin{cases}\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & y<\eta,\\ \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y), & \eta<y.\end{cases} \tag{24.12}$$

因此作为关于以四直綫 $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ 为边的矩形的 Laplace 方程的第一种 Green 函数，得到

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}}{n\sinh(n\pi b/a)}$$

$$\times\begin{cases}\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & y<\eta,\\ \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y), & \eta<y.\end{cases} \tag{24.13}$$

二維矩形域 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y),\quad 0<x<a,\ 0<y<b \tag{24.14}$$

的适合第一种边界条件

$$u(0,y)=u(a,y)=0,\quad u(x,0)=u(x,b)=0 \tag{24.15}$$

的解，由于把(24.5)或把(24.13)代入于(19.21)，即得

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2}$$

$$\times\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta \tag{24.16}$$

$$
=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{n\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi\left\{\int_0^y\sinh(n\pi\eta/a)\right.
$$

$$
\times\sinh(n\pi/a)(b-y)f(\xi,\eta)d\eta
$$

$$
\left.+\int_y^b\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta)f(\xi,\eta)d\eta\right\}. \qquad (24.17)
$$

2) 关于矩形的 Laplace 方程的 Dirichlet 問題　利用以上求出的第一种 Green 函数的結果，使其在 $x=0$，$x=a$，$y=b$ 三边上为 0，在 $y=0$ 上等于給定的 x 的函数 $g(x)$. 在这样的边界条件下：

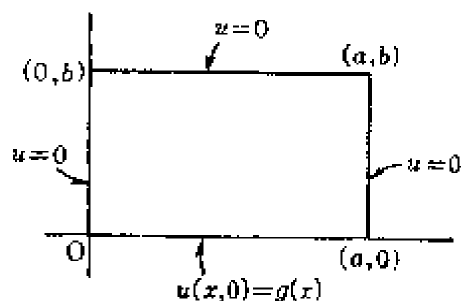


图　24.2

$$
u(0,y)=u(a,y)=u(0,b)=0, \quad (24.18)
$$

$$
u(x,0)=g(x), \quad (24.19)
$$

試求对于矩形域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 的 Laplace 方程的解。利用公式(19.13)，考虑在 $x=0$，a，$y=b$ 的三边上，边界值为 0，再求出其余一边 $y=0$ 上的

$$
\Gamma_1(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\partial G_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial n_C}=\frac{\partial G_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta} \qquad (24.20)
$$

的值就行了。因此，把(24.13)的下面一式就 η 微分之后并設 $\eta=0$，即得

$$
\Gamma_1(x,y;\xi,0)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}}{\sinh(n\pi b/a)}\sinh\left\{\frac{n\pi}{a}(b-y)\right\}, \quad (24.21)
$$

故从(19.13)得出所求的 Dirichlet 問題的解

$$
u(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\{(n\pi/a)(b-y)\}}{\sinh(n\pi b/a)}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi. \quad (24.22)
$$

再用 §19 的定理与問題 2) 中的 (e) 式所給出的 $\Gamma_1(P,C)$，試求同一問題的解。

因为 Γ_1 关于主变数 $P(x,y)$ 适合 (e) 的 1°，2°，所以 1° 就是 Laplace 方程的解，边界条件在 $x=0$，a 处为 0；令

$$
\Gamma_1(P,C)=\Gamma_1(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, \quad (24.23)
$$

而且为了适合 2°，把 C' 选为 $y=0$ 上的点$(\xi,0)$使 C' 向 C 收斂再令 $\Gamma_1(C',C)=\delta(C',C)$ 成立就行了。选取表达式

$$\delta(C', C) = \delta(x-\xi) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}, \tag{24.24}$$

为了 $\lim\limits_{P\to C}\Gamma_1(P, C)_{y=0}$ 与(24.24)一致，则要求

$$\gamma_n = \frac{2}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a} \tag{24.25}$$

成立。因而

$$\Gamma_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}. \tag{24.26}$$

这說明了从 §19 定理与問題(2)的公式(c)，得到

$$u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi, \tag{24.27}$$

当然与(24.22)一致。

【习题 1】 先用分离变数法直接解出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，然后利用 Fourier 展开試求(24.22)之解。

提 示 先令 $u(x, y)=X(x)Y(y)$，分离变数后考虑边界条件(24.18)，即为了使

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{a} = g(x),$$

则

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi.$$

关于矩形的 Helmholtz 方程的 Neumann 函数与 Neumann 問題

Neumann 函数，即第二种 Green 函数是方程

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}+k^2G_2 = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\quad 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b \tag{24.28}$$

适合边界条件

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(0, y; \xi, \eta) = \frac{\partial G_2}{\partial x}(a, y; \xi, \eta) = 0, \tag{24.29}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0; \xi, \eta) = \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, b; \xi, \eta) = 0 \qquad (24.29')$$

的解。

由边界条件(24.29)与 Green 函数的互易性，可假定

$$G_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n g_n(y)\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a},$$

$$\varepsilon_0 = 2,\ \varepsilon_n = 1,\ n = 1, 2, \cdots, \qquad (24.30)$$

再用表达式

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a} \qquad (24.31)$$

把(24.30)，(24.31)代入于(24.28)比較其对应项，即知 $g_n(y)$ 必然是常微分方程

$$\frac{d^2 g_n}{dy^2} + \left\{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right\} g_n = -\delta(y-\eta) \qquad (24.32)$$

适合边界条件

$$\frac{dg_n(0, \eta)}{dy} = \frac{dg_n(b, \eta)}{dy} = 0 \qquad (24.33)$$

的解。从(24.32)，(24.33)的形状，可假定

$$g_n(y, \eta) = \begin{cases} \gamma_n \cos\left(\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\, y\right)\cos\left\{\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-\eta)\right\}, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant y \leqslant \eta, \\ \gamma_n \cos\left(\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-y)\right)\cos\left\{\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{x}\right)^2}\,\eta\right\}, \\ \qquad\qquad \eta \leqslant y \leqslant b, \end{cases} \qquad (24.34)$$

再代入关于 g_n 的导数的跳跃条件(16.25)，则得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dg_n(\eta+0, \eta)}{dy} - \frac{dg_n(\eta-0, \eta)}{dy} = \gamma_n \varkappa[\sin\varkappa(b-y)\cos\varkappa\eta \\ &\qquad + \sin\varkappa y\cos\varkappa(b-\eta)]_{y=\eta} = \gamma_n\varkappa\sin\varkappa b = -1, \\ &\text{其中}\qquad \varkappa = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (24.35)$$

由(24.35)知

$$\gamma_n = -1/\varkappa\sin\varkappa b,$$

代入(24.34)，则得

$$\left.\begin{aligned} &g_n(y, \eta) = -\frac{1}{\varkappa\sin\varkappa b}\begin{cases}\cos(\varkappa y)\cos\{\varkappa(b-\eta)\}, \\ \cos\{\varkappa(b-y)\}\cos(\varkappa\eta), \end{cases} \\ &\varkappa = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (24.36)$$

故 $G_2(x, y; \xi, \eta)$ 可确定如下：

$$G_2(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a}$$

$$\times\begin{cases}\cos\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,y\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-\eta)\right\}, & 0\leqslant y\leqslant\eta, \quad (24.37)\\ \cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-y)\right\}\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,\eta\right\}, & \eta\leqslant y\leqslant b. \quad (24.37')\end{cases}$$

利用以上的結果，对于 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b \tag{24.38}$$

的 Neumann 問題

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}(0, y)=\frac{\partial u}{\partial x}(a, y)=\frac{\partial u}{\partial y}(b, x)=0\\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=g(x)\end{aligned}\right\} \tag{24.39}$$

的解能够利用公式(19.14)求出。(19.14)右端的綫积分在 $x=0$, $x=a$, $y=b$ 上之部分，依据(24.39)等于 0. 結果为

$$u(\xi, \eta)=\int_0^a G_2(x, 0; \xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)dx. \tag{24.40}$$

把(24.37)中設 $y=0$ 的

$$G_2(x, 0; \xi, \eta)=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$\times\cos\frac{n\pi\xi}{a}\cos\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-\eta)$$

代入于(24.40).

調換 (x, y) 与 (ξ, η) 的位置，所求之解則由

$$u(x, y)=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b-y)\right\}}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\times\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi \tag{24.41}$$

給出。

§25　关于圓柱的Green函数

1）关于无限圓柱的Laplace方程的Neumann函数　为了簡单起見，仅考察軸对称的情况（再补充了角的部分，即能簡单地导出一般的情况，讀者可自行扩充）。为了求

$$\Delta G\equiv\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=-\frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}\text{ ❶}$$

$$(-\infty<z<\infty,\ 0\leq r\leq a)\tag{25.1}$$

的基本解，依据(11.4)，設$\delta(z)$为

$$\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izk}dk,\quad -\infty<z<\infty,\tag{25.2}$$

又由(10.19′)得到关系式

$$\delta(r-\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\delta(r-\rho)=\frac{2}{a^2}\,r\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)J_0\left(\varkappa_l\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_0(\varkappa_l)\}^2},$$

但

$$J_0'(\varkappa_l)=0,\tag{25.3}$$

于此考虑$\rho\to 0$时的极限，得

$$\frac{\delta(r)}{r}=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\varkappa_l)\}^2},\tag{25.4}$$

故

$$-\frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}=\frac{-1}{2\pi^2a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\varkappa_l)\}^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izk}dk.\tag{25.5}$$

与此相应假定G的形式如

$$G_0(r,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_l(k)J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)e^{izk}dk.\tag{25.6}$$

于是得到❷

---

❶　对应$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$的极坐标的表式为$\{\delta(r-\rho)/r\}\delta(\varphi-\psi)$。这因为，乘以$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$之后就全平面积分之即得

$$\iint\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)dxdy=\int_0^{\infty}\delta(r-\rho)dr\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\psi)d\varphi=1.$$

关于軸对称的情形該用$\delta(r)/2\pi r$：$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\{\delta(r)/2\pi r\}\,r\,dr\,d\varphi=1$.

❷　$$\frac{d^2J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right)}{dr}=-\left(\frac{\varkappa_l}{a}\right)^2J_0\left(\varkappa_l\frac{r}{a}\right).$$

$$\Delta G_2(r, z) = -\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{k^2+(\varkappa_l/a)^2\}\, g_l(k) J_0\left(\varkappa_l \frac{r}{a}\right) e^{izk} dk. \quad (25.7)$$

把(25.5)，(25.7)代入于(25.1)，即知

$$g_l(k) = \frac{1}{2\pi^2 a^2 \{J_0(\varkappa_l)\}^2 \{k^2+(\varkappa_l/a)^2\}},$$

于是

$$G_2(r, z) = \frac{1}{2\pi^2 a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\varkappa_l \frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\varkappa_l)\}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izk}}{k^2+(\varkappa_l/a)^2}dk. \quad (25.8)$$

利用出现于 § 17 习题 1 的方法可以知道

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izk}}{k^2+(\varkappa_l/a)^2}dk = \frac{e^{-(\varkappa_l/a)|z|}}{2(\varkappa_l/a)},$$

因之

$$G_2(r, z) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left\{\varkappa_l \frac{r}{a}\right\} e^{-(\varkappa_l/a)|z|}}{\varkappa_l \{J_0(\varkappa_l)\}^2} \quad (25.9)$$

即是所求的 Neumann 函数。这是因为，(25.9)为(25.1)的解，即 Laplace 方程的基本解，由于 $J_0'(\varkappa_l)=0$，所以矢径方向的导数在圆柱面 $r=a$ 上为 0.

2) 关于圆的波动方程的 Green 函数 設

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (25.10)$$

試求与此对应的基本解，就是

$$L[G_1] = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t) \quad (25.11)$$

的解 $G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t)$，且在圆柱面 $r=a$ 上适合

$$G_1(a-\rho, \varphi-\psi, t) = 0, \quad (25.12)$$

它是这种边界条件的第一种 Green 函数，考虑

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega,$$

把 G_1 写成对于波数 ω 分解的形式

$$G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(r-\rho, \varphi-\psi, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (25.13)$$

决定波数 ω 的单色波的强度 g_1 的式子，是由

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial \varphi^2}+k^2 g_1$$
$$= -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \quad k=(\omega/c) \quad (25.14)$$

給出的。

象本节头一脚注那样，把 $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$ 以极坐标表示，就能写成 $\delta(r-\rho)\delta(\varphi-\psi)/r$，于是可把从(10.19)及(10.17)容易推导的关系式：

$$\frac{\delta(r-\rho)}{r}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\frac{\delta(r-\rho)}{r}=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2},$$

$$J_n(\lambda_{n,l})=0, \tag{25.15}$$

$$\delta(\varphi-\psi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in(\varphi-\psi)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi),$$

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{25.16}$$

代入于(25.14)的右端。

与此相应，假定(25.14)的解 g_1 为

$$g_1(r-\rho,\ \varphi-\psi,\ \omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}c_{n,l}\,\varepsilon_n J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)\cos n(\varphi-\psi),$$

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,\ 2,\ \cdots, \tag{25.17}$$

就能写成

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial g_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g_1}{\partial\varphi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}c_{n,l}\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)$$

$$\times\left\{\frac{\partial^2 J_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial J_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}J_n\right\}$$

$$=-(\lambda_{n,l}/a)^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)c_{n,l}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right), \tag{25.18}$$

因之，把(25.15)，(25.16)，(25.18)代入于(25.14)，得

$$c_{n,l}=\frac{1}{\pi a^2}\,\frac{J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}. \tag{25.19}$$

把(25.19)代入于(25.17)得

$$g_1(r-\rho,\ \varphi-\psi,\ \omega)=\frac{c^2}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)}{(\omega_{n,l}^2-\omega^2)\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}$$

$$\times J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right),$$

$$\omega_{n,l}=(c\lambda_{n,l}/a), \tag{25.20}$$

于是代入于(25.13)即得

$$G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t)=\frac{c^2}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)$$
$$\times J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{n,l}^2-\omega^2}d\omega. \qquad (25.21)$$

依据前见的积分公式(22.8)即知

$$G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t)$$
$$=\frac{c}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\lambda_{n,l}\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}$$
$$=\begin{cases}0, & 0<t,\\ \sin(c\lambda_{n,l}/a), & t<0\end{cases} \qquad (25.22)$$

为所求的第一种 Green 函数。

第4章　始值，边值問題的各种解法

§ 26　无限空間(一)　波动方程的純始值問題——普通的迭加原理

关于无限空間的問題，因为在有限处沒有任何边界条件，所以純粹是始值問題。例如，求三維空間的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u,\qquad -\infty<x<+\infty,$$

$$-\infty<y<+\infty,\qquad -\infty<z<+\infty \tag{26.1}$$

适合初始条件

$$u(x,\ y,\ z,\ 0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ z,\ 0)=\psi(x,\ y,\ z) \tag{26.2}$$

的对于 $0<t$ 的解。

这个問題可用分离变数法求解。特别形如

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=ce^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)} \tag{26.3}$$

的解，表示前进的平面波，假定将(26.3)代入于(26.1)則得条件

$$\omega=\pm c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}. \tag{26.4}$$

还有这样的解：把(26.4)代入于(26.3)，考慮它和逆方向进行的波——即数学上的共軛复值解——組合而成的解，即

$$e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\sin\left(ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right).$$

然后迭加这些解而得到

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}A(k_x,\ k_y,\ k_z)e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

$$\times\frac{\sin\left(ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right)}{c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z, \tag{26.5}$$

它也是一种解，現在說明如何使 u 适合初始条件。

(26.2)的第一条件因为 u 含 $\sin(ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2})$ 之項，所以自然成立，为了使第二条件成立，比較

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, k_z)e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\,dk_x\,dk_y\,dk_z \tag{26.6}$$

和把 $\psi(x, y, z)$ 展为三重 Fourier 积分的式子：

$$\psi(x, y, z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\,dk_x\,dk_y\,dk_z$$

$$\times\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi, \eta, \zeta)e^{-i(k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{26.7}$$

則得关系式

$$A(k_x, k_y, k_z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi, \eta, \zeta)e^{-i(k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

于是求得形式的解

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

$$\times\frac{\sin ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z$$

$$\times\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi, \eta, \zeta)e^{-i(k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{26.8}$$

当积分的顺序允許变更时，則能写成

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{c(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} I(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\psi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{26.9}$$

这里的

$$I(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$

$$=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2})}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}e^{i\{(x-\xi)k_x+(y-\eta)k_y+(z-\zeta)k_z\}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z. \tag{26.10}$$

(26.10)的計算大体上类似于(20.5)的計算，在 k 空間选定球面坐标，則較簡单。就是把 $\boldsymbol{k}(k_x, k_y, k_z)$ 及 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 两向量所夹之角設为 ω，并写作 $k_x x+k_y y+k_z z=kr\cos\omega$，选 k 空間的球面坐标的軸使其与向量 $\boldsymbol{r}$ 重合，把背

通的角变数 θ, φ 更換为从 r 所量之角 ω 及 r 軸周圍的方位角 χ，并取新变数，这么，因为 k 空間中的体元素 $d\tau_k$ 能写成 $dk_x\,dk_y\,dk_z=k^2\,dk\sin\omega\,d\omega\,d\chi$，

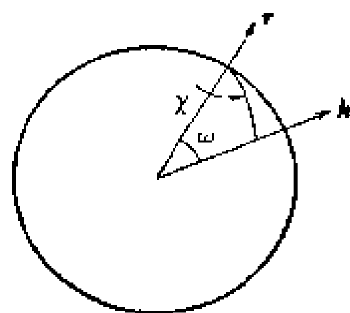


图 26.1

故能算出[参照 (20.10)]

$$I=\int_0^{2\pi}d\chi\int_0^{\infty}\sin\,(ctk)k\,dk\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\omega}\sin\omega\,d\omega$$

$$=\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\sin kct\sin kr\,dk,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

由于(11.6′)，就成为

$$I(x-\xi,\,y-\eta,\,z-\zeta)=2\pi^2\frac{\delta(ct-r)}{r}. \tag{26.11}$$

把(26.11)代入于(26.9)，則得

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{4c\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\,\eta,\,\zeta)\frac{\delta(ct-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

利用

$$\xi-x=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad \eta-y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\zeta-z=r\cos\theta$$

轉变为球面坐标，計算之則得

$$=\frac{1}{4c\pi}\int_0^{\infty}r\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\psi(x+r\sin\theta\cos\theta,\,y+r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z+r\cos\theta)\cdot\delta(ct-r)d\varphi,$$

若把关于角部分的均値写成

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,\,y+r\sin\theta\sin\varphi,\,z+r\cos\theta)$$
$$\times d\varphi\Big/\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$=\overline{\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,\,y+r\sin\theta\sin\varphi,\,z+r\cos\theta)},$$

則有

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}\overline{\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,\,y+r\sin\theta\sin\varphi,\,z+r\cos\theta)}$$
$$\times\delta(ct-r)r\,dr$$
$$=t\overline{\psi(x+ct\sin\theta\cos\varphi,\,y+ct\sin\theta\sin\varphi,\,z+ct\cos\theta)}. \tag{26.12}$$

"由此可知在时刻 t，在 (x, y, z) 点的波动，是那些与此点相距 ct 的各点的子波的全部迭加的总和"(Huygens 原理)。把(26.12)就 t 微分并設 $t=0$，就能簡单地驗証(26.2)的第二条件成立。

若 $u(x, y, z, t)$ 是(26.1)的解，則 $v=\partial u/\partial t$ 也是該方程的解。所以微分(26.12)而得的

$$u(x, y, z, t)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\{t\overline{\varphi(x+ct\sin\theta\cos\varphi,\ y+ct\sin\theta\sin\varphi,\ z+ct\cos\theta)}\} \tag{26.13}$$

是波动方程的另一个解 在(26.13)，及微分而得的式子中代入 $t=0$，就能驗証(26.13)适合初始条件❶

$$u(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0)=0. \tag{26.14}$$

因而根据迭加原理，可知，(26.12)与(26.13)作和而得

$$u(x, y, z, t)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\{t\overline{\varphi(x+ct\sin\theta\cos\varphi, y+ct\sin\theta\sin\varphi, z+ct\cos\theta)}\}$$
$$+t\overline{\psi(x+ct\sin\theta\cos\varphi, y+ct\sin\theta\sin\varphi, z+ct\cos\theta)}, \tag{26.15}$$

它是一般初始条件

$$u(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0)=\psi(x, y, z) \tag{26.16}$$

的解，这么就解决了对于三維波动方程的一般始值問題。

---

❶ (26.14)的第一式由于在(26.13)的右端置 $t=0$ 而得。第二式則由于 $t\bar{\varphi}$ 是波动方程的解这一事实：$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\bar{\varphi})=c^2\Delta(t\bar{\varphi})=c^2t\Delta\bar{\varphi}$，在 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\bar{\varphi})=c^2t\Delta\bar{\varphi}$ 設 $t=0$ 即得証。

§27 无限空間(二)　热傳导方程的純始值問題——广义 Green 公式的应用

把一維热傳导方程

$$L[u]\equiv\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\qquad -\infty<x<\infty \tag{27.1}$$

的純始值問題:

$$u(x,\ 0)=f(x) \tag{27.2}$$

用广义 Green 公式来解决。

如在 §21 所見，給定关于 L 的伴随式

$$M[v]\equiv\varkappa^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{27.3}$$

則广义 Green 公式(21.6)成为:

$$\iint_D\{vL[u]-uM[v]\}dx\,dt=\oint_C\left\{\varkappa^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt+uv\,dx\right\}. \tag{27.4}$$

以属于(27.3)的 M 的偏微分方程

$$M[H_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{27.5}$$

的解 H_0 代替(27.4)中的 v. 假設 u 是(27.1)的解，当$(\xi,\ \tau)$在 D 之内部时，由左端的第二項即得 $u(\xi,\ \tau)$:

$$\begin{aligned}u(\xi,\ \tau)=\oint_C\Bigg[&\left\{\varkappa^2 H_0(x,\ t;\xi,\ \tau)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)-u(x,\ t)\right.\\&\left.\times\frac{\partial H_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial x}\right\}dt\\&+u(x,\ t)H_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)dx\Bigg].\end{aligned} \tag{27.6}$$

但是(27.5)有这么一个解

$$H_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=\begin{cases}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}/2\varkappa\sqrt{\pi(\tau-t)}, & t<\tau, \quad (27.7)\\ 0, & \tau<t. \quad (27.7')\end{cases}$$

这个結果可以用§23中求

$$L[G_0(x, t; \xi, \tau)] = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{27.8}$$

之解的方法，作完全相似的計算就能得到。当然用互相伴随的基本解 H, G 所成立的恒等关系❶

$$H_0(x, t; \xi, \tau) = G_0(x, -t; \xi, -\tau) \tag{27.9}$$

就更便当了。

把广义 Green 公式的适用区域 $\boldsymbol{D}$ 选为如图27.1所示的图形，即以 x 軸为一边，其他的边分别平行于坐标軸 x, t，而且选充分大的矩形，则 (ξ, τ) 成为 $\boldsymbol{D}$ 的内点，設矩形的周界为 $\boldsymbol{C}$，且(27.6)成立，积分在 $\boldsymbol{C}$ 中与 t 軸平行的二边AB, CD上的值，随同 $x\to\infty$，关于 $\tau<t$ 的部分根据(27.7′)成为0. 至于 $t<\tau$ 的部分根据(27.7)当 $x\to\infty$ 时，被积函数的极限指数函数性地收斂于0. 又对BC的 t 坐标，若 $\tau<t$，在此部分被积函数也成0，所以結果仅剩下沿 x 軸的积分。这一部分因 $t=0$, $dt=0$，故

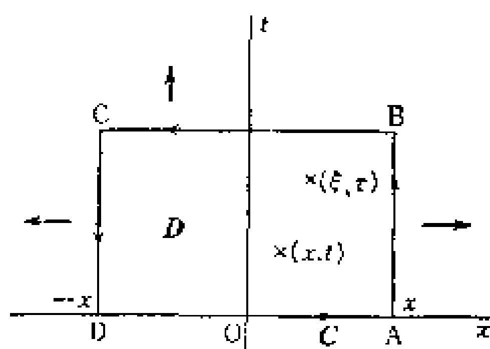


图 27.1

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2\tau}}}{2\varkappa\sqrt{\pi\tau}}dx, \tag{27.10}$$

从初始条件(27.2)得

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2\tau}}}{2\varkappa\sqrt{\pi\tau}} f(x)dx.$$

調换 x 与 ξ, t 与 τ 的位置，則得

---

❶ 这是于规定 G_0 的方程(27.8)中，作反向的时間变换：$t\to -t$, $\tau\to -\tau$，卽得

$$L[G_0(x, -t; \xi, -\tau)] = \varkappa^2\frac{\partial^2 G_0(x, -t; \xi, -\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial G_0(x, -t; \xi, -\tau)}{\partial t}$$
$$= -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$

由此可見(27.9)之关系成立。

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2 t}}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}f(\xi)d\xi, \tag{27.11}$$

即是所求的始值問題的解。

§28 无限空間(三) 电报方程(Klein-Gordon 方程)的基本解(极限成为波动方程)

在經典电磁力学中考虑衰退的波动方程，以及量子力学中的 Klein-Gordon 方程，它們的共同形式是

$$L[u]=\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\varkappa^2 u=0, \tag{28.1}$$

当 $\varkappa=0$ 时即为普通三維的波动方程。对于(28.1)的基本解，即

$$L[G(x,\ y,\ z,\ t)]=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)\ ❶ \tag{28.2}$$

的解的求法，可以仿照 §22 的方法进行計算。由于空間維数的提高当然要比 §22 稍为复杂，但是思想方法是相同的，故仅述要点，詳細計算則請讀者作为习題解之。考察无界空間的情况，利用 Fourier 积分可写成

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\times dk_x\,dk_y\,dk_z\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{28.3}$$

与此相应，令

$$G_0(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{-\infty}^{\infty}dk_x\,dk_y\,dk_z\int_{-\infty}^{\infty}g(k_x,\ k_y,\ k_z,\ \omega)\times e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}\,d\omega \tag{28.4}$$

且把(28.3)，(28.4)代入(28.2)，与 §22 同样，就能决定

$$g(k_x,\ k_y,\ k_z,\ \omega)=-1/\{(\omega/c)^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2-\varkappa^2\}.$$

这么对应于(22.6)的，就是

$$G_0(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{-c^2}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\times dk_x\,dk_y\,dk_z\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega, \tag{28.5}$$

---

❶ 一般說应該論証

$$L[G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\delta(t-\tau),$$

因其过长故仅取 $\xi=\eta=\zeta=\tau=0$ 的場合。

这里的 ω_0 是

$$\omega_0 = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2}. \tag{28.6}$$

关于 ω 的积分如 § 22 的詳細計算那样，結果得到(22.8)．所以(28.5)能写成如下的形状：

$$G_0(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, & (28.7) \\ \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ \times \dfrac{\sin ct\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z, \quad 0 < t. \end{cases} \tag{28.7'}$$

至于积分

$$I(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{\sin ct\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z \tag{28.8}$$

的計算，采用計算(26.10)时所用的极坐标，卽得

$$\begin{aligned} I(x, y, z, t) &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin\left(ct\sqrt{k^2 + \varkappa^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \varkappa^2}}\, k^2\, dk \int_0^\pi e^{ikr\cos\omega} \sin\omega\, d\omega \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\sin\left(ct\sqrt{k^2 + \varkappa^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \varkappa^2}}\, k \sin kr\, dk \\ &= -4\frac{\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{\sin\left(ct\sqrt{k^2 + \varkappa^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \varkappa^2}} \cos kr\, dk. \end{aligned} \tag{28.9}$$

最后的积分借助 Bessel 函数 J_0 的积分公式

$$\int_0^\infty \cos at \frac{\sin\left(b\sqrt{t^2 + c^2}\right)}{\sqrt{t^2 + c^2}}\, dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} J_0\left(c\sqrt{b^2 - a^2}\right), & |a| < |b|,\ 0 < b, \\ 0, & |b| < |a|, \\ -\dfrac{\pi}{2} J_0\left(c\sqrt{b^2 - a^2}\right), & |a| < |b|,\ b < 0 \end{cases} \tag{28.10}$$ [1]

就能表为

---

[1] 例如寺沢寛一著：数学概論(岩波版，日文) 669 頁；犬井鐵郎著：球函数，圆柱函数，超几何函数(河出書房，日文) 583 頁。

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\varkappa^2})}{\sqrt{k^2+\varkappa^2}} \cos kr\, dk$$

$$=\begin{cases} \frac{\pi}{2} J_0(\varkappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & r<ct, \quad (28.11) \\ 0, & -r<ct<r, \quad (28.11') \\ -\frac{\pi}{2} J_0(\varkappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & ct<-r. \quad (28.11'') \end{cases}$$

从而(28.8)的积分可写成

$$I(r, ct, \varkappa)=\mp\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases} J_0(\varkappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & |ct|>r, \quad (28.12) \\ 0, & |ct|<r. \quad (28.12') \end{cases}$$

但其右端的 $\mp$，当 $0<t$ 时取 $-$，$t<0$ 时取 $+$. 借助 Bessel 函数的公式

$$J_0'(z)=-J_1(z),$$

能写成

$$I(r, ct, \varkappa)=2\pi^2\begin{cases} \frac{\delta(ct-r)}{r}-\frac{\delta(ct+r)}{r}\mp\varkappa\frac{J_1(\varkappa\sqrt{(ct)^2-r^2})}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}, & r<|ct|, \quad (28.13) \\ 0, & |ct|<r. \quad (28.13') \end{cases}$$

在这里所以出现包含 δ 函数的项，是因为在 $ct\pm r=0$ 的前后发生了跳跃为 1 的阶梯函数的不連續性。这一点直接从(28.9)的第二个积分公式

$$I(r, ct, \varkappa)=\int_0^\infty \frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\varkappa^2})}{\sqrt{k^2+\varkappa^2}} k \sin kr\, dk \tag{28.14}$$

可以看到，当 $\varkappa=0$ 时，有下面的結果：

$$\begin{aligned} I(r, ct, 0) &= \int_0^\infty \sin(ctk)\sin kr\, dk \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\cos k(ct-r)-\cos k(ct+r)\}dk \\ &= \frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{ik(ct-r)}dk-\int_{-\infty}^\infty e^{ik(ct+r)}dk\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\{\delta(ct-r)-\delta(ct+r)\}, \end{aligned} \tag{28.15}$$

即能明白。

因此由(28.7)即知存在着如下的解：

$$G_0^{(R)}(x, y, z, t)=\begin{cases} 0, & t<0, \quad (28.16) \\ 0, & t>0,\ ct<r, \quad (28.16') \\ \dfrac{c}{4\pi}\left[\dfrac{\delta(ct-r)}{r}-\dfrac{\varkappa J_1(\varkappa\sqrt{(ct)^2-r^2})}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right], & t>0,\ r<ct. \end{cases}$$

(28.16″)

对于特殊場合 $\varkappa=0$ 的波动方程，則得到

$$G_0^{(R)}(x, y, z, t)=\begin{cases} 0, & t<0, \quad (28.17) \\ \dfrac{c}{4\pi}\dfrac{\delta(ct-r)}{r}, & t>0. \quad (28.17') \end{cases}$$

从(28.16)，(28.17)的构造就可以了解它們的物理意义，当 $t<0$ 时即对过去的时間，在全空間完全沒有波动，空間是寂靜的。但是在 $t=0$ 时，突然在原点处出現了单位强度的点冲击，从而对 $t>0$ 就发生了波动状态。至于在 δ 函数中的变数 $ct-r$ 是时、空变数的組合的意义是原点处的震蕩，直到时間 $t=r/c$，才傳播到距原点为 r 的点(推迟势 retarded potential)。

如 §22 中所述，积分 I 与积分路綫的取法有关，为了使积分路綫 C 避开极点 $\omega=\pm\omega_0$，可将路綫取得过极点的不同側，这样就导致物理上的不同意义。例如所选的 C 可以皆从两极的下側通过，这么就得到对应(28.17)的

$$G_0^{(A)}(x, y, z, t)=\begin{cases} 0, & t>0, \quad (28.18) \\ \dfrac{c}{4\pi}\dfrac{\delta(ct+r)}{r}, & t<0, \quad (28.18') \end{cases}$$

这时傳播时間的順序是相反的(提前势 advanced potential)。

与此相反，如取把两个极点 $\omega=\pm\omega_0$ 都包含在內的曲綫为复值积分的路綫的話，就得到代替(28.9)的公式

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega=-\frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0}, \tag{28.19}$$

从而得到代替(28.17)～(28.18)的解

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{c^2}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}\cdot\frac{\sin ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z \\ &= \frac{4\pi}{r}\int_0^\infty \sin(kct)\sin kr\,dk \\ &= 2\pi^2\left\{\frac{\delta(ct-r)}{r}-\frac{\delta(ct+r)}{r}\right\}, \end{aligned} \tag{28.20}$$

它不是基本解，就是說它不是(28.2)的解，而是右端不带非齐次部分的方程

的解。即在(28.1)中設 $\varkappa=0$ 得到的波动方程的解。所以如此，是由于在 ω 平面上这样选取积分路綫的結果，使得(28.3)右端的积分为0，从而不出現 δ 函数的緣故。

§29 半无限空間中的热傳导問題

1）对于半无限空間热傳导方程問題的鏡象方法 一維热傳导方程基本解的表达式为

$$G_0(x,\ t;\xi,\ \tau)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}},\tag{29.1}$$

从物理上說，表示着于 $x=\xi$ 处，当时刻 $t=\tau$ 突然出现强度为1的点热源，已述于§23，現在，在关于 t 軸，与 $\xi>0$ 成对称的点 $x=-\xi$ 处，再引入一个强度不变但正負号相反的点热源：

$$-G_0(x,\ t;\ -\xi,\ \tau)=-\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}},\tag{29.2}$$

并将二者迭加起来，得到

$$\begin{aligned}G_1(x,\ t;\xi,\ \tau)&\equiv G_0(x,\ t;\xi,\ \tau)-G_0(x,\ t;-\xi,\ \tau)\\&=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}\},\end{aligned}\tag{29.3}$$

根据对称性，在直綫 $x=0$ 上第一种边界条件

$$G_1(0,\ t;\ \xi,\ \tau)=0\tag{29.4}$$

恒成立。从而若对 $0<x$ 考虑

$$G_1(x,\ t;\xi,\ \tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (29.5)\\ \dfrac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}\}, & \\ & 0<x,\ \tau<t \quad (29.5')\end{cases}$$

的話，就能明白：这正是对半无限一維区域 $0<x$ 在边界 $x=0$ 适合第一种齐次边界条件(29.4)的第一种 Green 函数。

相反，以同符号的形式迭加而得的

$$G_2(x, t; \xi, \tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (29.6)\\ \dfrac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}\right\}, & \\ & 0<x,\ \tau<t \quad (29.6')\end{cases}$$

能够証实这正是关于边界 $x=0$ 的第二种 Green 函数：

$$\left(\frac{\partial G_2(x, t; \xi, \tau)}{\partial x}\right)_{x=0}=0. \qquad (29.7)$$

至于应用广义 Green 公式时所必需的伴随 Green 函数，引用 (27.9) 中的反轉时間順序的变换 $t\to -t,\ \tau\to -\tau$，可得

$$H_1(x, t; \xi, \tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ \tau<t, \quad (29.8)\\ \dfrac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{e^{-\frac{(\tau-\xi)^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}\right\}, & \\ & 0<x,\ t<\tau, \quad (29.8')\end{cases}$$

它是第一种伴随 Green 函数，而

$$H_2(x, t; \xi, \tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ \tau<t, \quad (29.9)\\ \dfrac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}\right\}, & \\ & 0<x,\ t<\tau \quad (29.9')\end{cases}$$

是第二种伴随 Green 函数 (Neumann 函数)。

2) **一端的边界值作为时間函数而变动的热傳导問題** 一維半无限：$0\leqslant x$ 的热傳导方程适合初始条件

$$u(x, 0)=0 \qquad (29.10)$$

及边界条件

$$u(0, t)=f(t) \qquad (29.11)$$

的解能利用上述第一种伴随 Green 函数求出。就是把在热傳导的場合

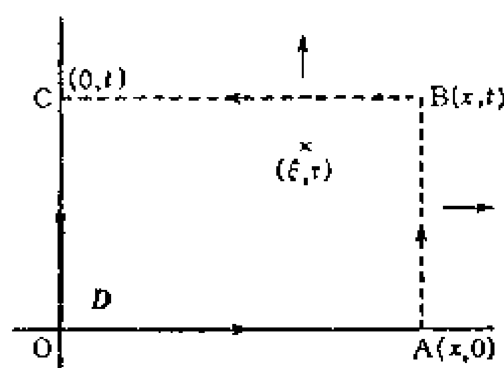


图 29.1

已經求得的广义 Green 公式 (27.4)，用于图 29.1 那样的以 $x=0$，$t=0$ 及与此平行的二直綫所圍成的矩形域 OABCO，設 u 是

$$L[u]\equiv\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 0<x \tag{29.12}$$

的解，对于 v 代入(29.8)的 $H_1(x,t;\xi,\tau)$。

由于 $H_1(x,t;\xi,\tau)$ 是

$$M[H_1(x,t;\xi,\tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\quad 0<x,\ 0<\xi \tag{29.13}$$

的解，于是这么得到的关系中

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\Big[H_1(x,t;\xi,\tau)\Big(\varkappa^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big)\\&\quad-u(x,t)\Big(\varkappa^2\frac{\partial^2 H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}\Big)\Big]dx\,dt\\&=\Big(\int_A^B+\int_C^O\Big)\varkappa^2\Big[H_1(x,t;\xi,\tau)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-u(x,t)\frac{\partial H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\Big]dt\\&\quad+\Big(\int_O^A+\int_B^C\Big)[H_1(x,t;\xi,\tau)u(x,t)]dx,\end{aligned} \tag{29.14}$$

左端第一项为0，第二项成

$$\iint\limits_D u(x,t)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,dx\,dt=u(\xi,\tau).$$

随同直綫 AB 远迁到 $+\infty$，因为 $H_1(x,t;\xi,\tau)$ 具有指数函数的项，卽知这个积分收斂于0，边 BC 上的积分只要选得 $\tau<t$，(29.9) 卽成立，因之为0，剩下的仅是沿着 OA 及 OC 上的积分。在 AO 上因 $t=0$ 从初始条件 (29.10) 卽知此积分也是0，所以

$$u(\xi,\tau)=\int_0^t\varkappa^2\Big[\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}u(0,t)-H_1(0,t;\xi,\tau)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\Big]dt.$$

根据定义可知 $H_1(0,t;\xi,\tau)=0$，又从 (29.11) 可知 $u(0,t)=f(t)$，因之結果是

$$\begin{aligned}u(\xi,\tau)&=\int_0^t\varkappa^2\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}f(t)dt\\&=\int_0^\tau\varkappa^2\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}f(t)dt\,❶.\end{aligned} \tag{29.15}$$

---

❶ $u(\xi,\tau)=-\varkappa^2\int_0^\tau\frac{\partial H_1}{\partial n}(0,t;\xi,\tau)f(t)dt=-\varkappa^2\int_0^\tau\frac{\partial G_1(\xi,\tau;0,t)}{\partial n}f(t)dt,$

$$u(x,t)=-\varkappa^2\int_0^t\frac{\partial G_1(x,t;0,\tau)}{\partial n}f(\tau)d\tau \tag{a}$$

这是使用非伴随的 Green 函数 G_1 本身来表达的式子。

至于对于 $\tau<t$ 的阶段，因为 $H_1(x, t; \xi, \tau)=0$，所以对于积分毫无影响。

故将 H_1 代以(29.8)的形式，計算之得

$$u(\xi, \tau)=\frac{\xi}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2(\tau-t)}}}{(\tau-t)^{3/2}} f(t)dt. \tag{29.16}$$

調換 x, t 与 ξ, τ 的位置可得

$$u(x, t)=\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} f(\tau)d\tau. \tag{29.17}$$

3) **在边界 $x=0$ 适合第三种齐次条件的始值問題的解** 在边界 $x=0$ 适合第三种齐次边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)_{x=0}=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)_{x=0}=0 \tag{29.18}$$

的半无限問題，仍然是先求适合相同边界条件

$$-\frac{\partial G_3}{\partial x}+hG_3=0 \tag{29.19}$$

在半无限域的第三种 Green 函数，然后借此从积分

$$u(x, t)=\int_0^\infty G_3(x, t; \xi, 0)f(\xi)d\xi \tag{29.20}$$

就能解出❶。可是这时的鏡象方法与第一种，第二种的情形不同。对于半无限域的 Green 函数由对称原理就能知道鏡象法是可用的。可是对于目前的这种 Green 函数的問題，則需要适当的計算。

实际在(29.1)所求的 $G_1(x, t; \xi, \tau)$, $G_2(x, t; \xi, \tau)$都是 $G_0(x, t; \xi, \tau)$, $G_0(x, t; -\xi, \tau)$ 的綫性組合，且在边界 $x=0$ 上分别适合

$$G_1(0, t)=0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial n}(0, t)=0,$$

因此，作双方的綫性組合

❶ 这个結果可以从图 29.1 所示的区域，用广义 Green 公式，作 § 29 相同的計算即能証明。对 f 在边界 $t=0$ 上代入初始条件 $u(x, 0)=f(x)$，在边界 $x=0$ 上的綫积分，因为 u 及 G_3 适合边界条件 (29.18)，(29.19) 而消失。

$$G\equiv G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)+AG_0(x,\ t;\ -\xi,\ \tau)$$
$$=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}+A\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\tag{29.21}$$

并适当决定 A，使得边界条件(29.19)成立。然后由

$$\frac{\partial G}{\partial n}\equiv-\frac{\partial G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial x}=\frac{-2}{(2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)})^{3/2}}$$
$$\times\left\{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}+A(x+\xi)\,e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}\right\}\tag{29.22}$$

可得

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}+hG\right)_{x=0}=\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\frac{\xi}{2\varkappa^2(t-\tau)}(1-A)+h(1+A)\right\}=0,\tag{29.23}$$

因为要对于随意的 ξ 成立，所以非同时成立 $1-A=0$，$1+A=0$ 不可❶。

由此可见，单是点热源的迭加不足以解决问题，那么作为热传导方程的一般形式的解，把从 §23 习题 1(d) 得出的形如

$$\int_{-\infty}^{-\xi}f(\eta)d\eta\int_0^{\infty}e^{-\varkappa^2k^2(t-\tau)}\cos k(x-\eta)dk=\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\eta)\,d\eta$$

的解再迭加于上列的(29.21)，得到

$$G(x,\ t;\xi,\ \tau)=G_0(x,\ t;\xi,\ \tau)+AG_0(x,\ t;\ -\xi,\ \tau)$$
$$+\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\eta)d\eta,\tag{29.24}$$

現在还須要驗証它是否适合条件(29.19)呢？这时

$$-\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial x}+A\frac{\partial G_0(x,\ t;\ -\xi,\ \tau)}{\partial x}$$
$$+\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)f(\eta)d\eta,$$

故

$$(2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}\,G)_{x=0}=(1+A)e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}+\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{\eta^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}f(\eta)d\eta,$$

---

❶ $h=0$ 时 $A=1$；$h\to\infty$ 时 $A=-1$，即为(29.7)及(29.8)的情况。

$$\left(2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{\xi(1-A)}{2\varkappa^2(t-\tau)}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}-\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}\right)_{x=0}f(\eta)d\eta$$

$$=\left\{\frac{\xi(1-A)}{2\varkappa^2(t-\tau)}-f(-\xi)\right\}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}$$

$$+\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{\eta^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}f'(\eta)d\eta.$$

把这些式子代入于(29.18)，为了使其等于 0，则要求条件

$$(1-A)=0, \tag{29.25}$$

$$h(1+A)+f(-\xi)=0, \tag{29.25'}$$

$$f'(\eta)-hf(\eta)=0 \tag{29.26}$$

同时成立。

从(29.25)，(29.25′)知

$$A=1,\quad f(-\xi)=-2h. \tag{29.27}$$

又未知函数 $f(\eta)$ 作为(29.26)的解，是

$$f(\eta)=Ce^{h\eta},$$

积分常数 C 从(29.27)知其为 $C=-2he^{h\xi}$. 于是确定

$$f(\eta)=-2he^{h(\eta+\xi)}. \tag{29.28}$$

把(29.27)，(29.28)代入于(29.24)，即得所求的第三种 Green 函数

$$(2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)})G_3(x,t;\xi,\tau)$$

$$=e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}-2he^{h\xi}\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}+h\eta}d\eta. \tag{29.29}$$

特别設 $\tau=0$ 并代入于(29.20)，就能得到在 $t=0$ 初始条件为 $f(x)$ 的，在边界 $x=0$ 的第三种齐次边界值問題的解。

§30 关于圆的势的 Dirichlet 問題

1) 由基本解作出 Green 函数　二維 Laplace 方程的基本解，即

$$\Delta_P^{(2)}[G_0(P,Q)]=-\delta(P,Q) \tag{30.1}$$

的解，根据(20.22)，可以給成

$$G_0(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{PQ}}. \tag{30.2}$$

从而，把对于(30.1)的齐次方程的解即二維 Laplace 方程的解迭加于此式，在半徑 a 的給定圓上使其适合第一种条件(19.10)，这样决定的話，就得到所求的 Green 函数。二維 Laplace 方程用极坐标表示的式子是

$$\Delta^{(2)}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \tag{30.3}$$

用分离变数法：$u(r, \varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ 解之，角部分若规定为

$$\Phi(\varphi)=\cos n\varphi,\ \sin n\varphi, \tag{30.4}$$

就能得到矢徑函数[1]

$$R(r)=r^n \quad 或 \quad r^{-n}, \tag{30.5}$$

因此可知，在 $r=0$ 的邻域，作为(30.3)的有限解则形状如

$$U(r, \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi). \tag{30.6}$$

再把形如(30.6)的解迭加于基本解(30.2)而得形如

$$G_1(P, Q)=G_0(P, Q)+U(r, \varphi) \tag{30.7}$$

的函数，这时如何决定系数 a_n, b_n，使得当 P 趋近于圆周 $\boldsymbol{C}$ 上的点时

$$G_1(C, Q)=0, \quad C\in\boldsymbol{C} \tag{30.8}$$

成立？

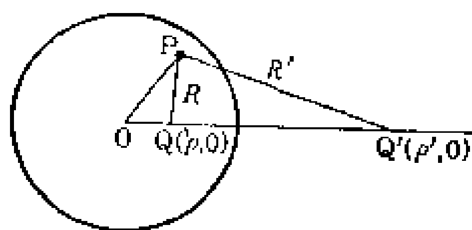


图 30.1

以給定圓的中心为原点取极坐标，設点 P 的坐标为 (r, φ)，点 Q 的坐标为 $(\rho, 0)$，于是基本解(30.2)中出現的距离 r_{PQ} 是

---

[1] R 所适合的方程是 $R''+(2/r)R'-(n^2/r^2)R=0$，假定此方程的解为 $R(r)=r^{\rho}$，代入之后得 $\rho=\pm n$。

$$r_{PQ}=\sqrt{r^2-2\rho r\cos\varphi+\rho^2}\,, \tag{30.9}$$

与 U 的形式(30.6)相应地，把 $\log(1/r_{PQ})$ 展开为关于 φ 的 Fourier 級数，結果是

$$\begin{aligned}-\log(1/r_{PQ})&=\log(r\sqrt{1-2\zeta\cos\varphi+\zeta^2})\\&=\log r+\frac{1}{2}\{\log(1-\zeta e^{i\varphi})(1-\zeta e^{-i\varphi})\}\\&=\log r-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n\cos n\varphi/n\text{❶},\qquad \zeta=\rho/r<1,\end{aligned}$$

因此可写成

$$\begin{aligned}-2\pi G_0(P,Q)&\equiv-2\pi G_0(r,\varphi';\rho,0)\\&=\log r-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi.\end{aligned} \tag{30.10}$$

故从条件

$$\begin{aligned}2\pi G_1(a,\varphi';\rho,0)=\Bigg[\frac{a_0}{2}-\log r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n r^n+\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}\cos n\varphi\\+\sum_{n=1}^{\infty}b_n r^n\sin\varphi\Bigg]_{r=a}=0,\end{aligned} \tag{30.11}$$

得到

$$a_0=2\log a,\qquad a_n=\frac{-1}{n}\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n;\qquad b_n=0. \tag{30.12}$$

把(30.12)代入于(30.11)得

$$2\pi G_1(r,\varphi;\rho,0)=\log(a/r)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n r^n-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}\cos n\varphi. \tag{30.13}$$

这就是关于以 a 为半径以原点为中心之圆的第一种 Green 函数，就 φ 展为 Fourier 級数的表达式。整理一下(30.13)的級数形状，就更容易說明物理上的意义，那就是，根据(30.10)反过来把(30.13)的一部分 Fourier 級数集中写成

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi&=\log r_{PQ}-\log r\\&=\log\sqrt{1-2\left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2},\end{aligned} \tag{30.14}$$

---

❶ $\log(1-\zeta e^{\pm i\varphi})=-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n e^{\pm in\varphi}/n$.

若令

$$\rho\rho' = a^2, \tag{30.15}$$

則同样的級数也能集中写成

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n r^n \cos n\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho'}\right)^n \cos n\varphi$$

$$= \log\sqrt{1-2\left(\frac{r}{\rho'}\right)\cos\varphi+\left(\frac{r}{\rho'}\right)^2}, \tag{30.16}$$

因之(30.13)就成为

$$2\pi G_1(r, \varphi; \rho, 0) = \log(a/r) + \log\sqrt{1-2\left(\frac{r}{\rho'}\right)\cos\varphi+\left(\frac{r}{\rho'}\right)^2}$$

$$-\log\sqrt{1-2\left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

现在若使用

$$R = \sqrt{r^2-2\rho r\cos\varphi+\rho^2},\quad R' = \sqrt{r^2-2\rho' r\cos\varphi+\rho'^2}, \tag{30.17}$$

結果就能写成

$$2\pi G_1(r, \varphi; \rho, 0) = \log\frac{aR'}{\rho'} - \log R = \log\frac{\rho R'}{a} - \log R$$

$$= \log\frac{\rho R'}{aR}. \tag{30.18}$$

作为点 Q，取一般的点 (ρ, ψ) 以代 $(\rho, 0)$，这么就代替了(30.17)，有

$$R = \sqrt{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\psi)+\rho^2},$$

$$R' = \sqrt{r^2-2\rho' r\cos(\varphi-\psi)+\rho'^2},$$

最后把上面的 R, R' 代入(30.18)卽可。

R 表示 PQ 之間的距离，与(30.9)的式子相同，相对地，R' 意味着从 OQ 的延長綫上的点 Q′ 到点 P 的距离，但是 Q′ 与 O 的距离 ρ' 是由关系(30.15)所决定的。点 Q′ 叫做关于圓 O 的点 Q 的**鏡象点**。特别当点 P 落在圆周上时，从(30.15)关系可知，△OQP ∼△OPQ′，于是 $a/\rho = \rho'/a = R'_a/R_a$ 成立。这里的 R_a, R'_a 分别是

当 P 落在圆周上时，它与 Q，Q′ 的距离。結果有 $aR_0=\rho R_0'$，于是 (30.18) 的函数 G_1 实际在圆周上的任意点为零。

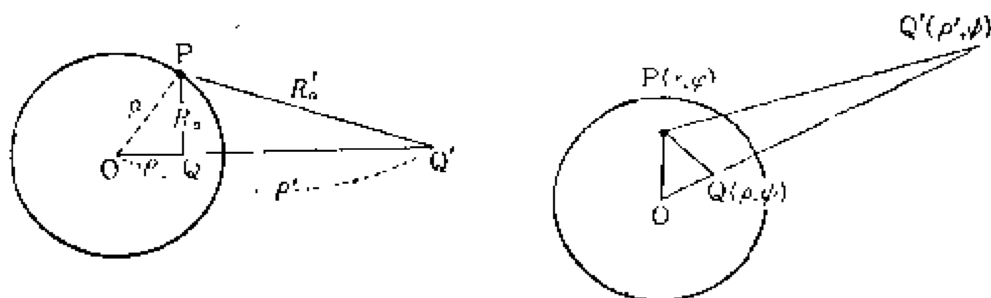


图 30.2

2) **Dirichlet 問題的解** 第一种 Green 函数既已求出，这么利用公式(19.9)就能够解决关于圆的 Dirichlet 問題。

这就是，在圆上因为 $\partial/\partial n=\partial/\partial r$，故从(30.18)得

$$2\pi\frac{\partial G_1}{\partial n}=\frac{1}{R'}\frac{\partial R'}{\partial r}-\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r}$$

$$=\frac{r-\rho'\cos(\varphi-\psi)}{R'^2}-\frac{r-\rho\cos(\varphi-\psi)}{R^2},$$

設 $r=a$ 并用 $\rho'=a^2/\rho$ 之关系就能简化成为

$$2\pi\left(\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)_{r=a}=-\frac{a\left\{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right\}}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}. \qquad (30.19)$$

把(30.19)代入于(19.9)即得

$$u(\rho,\ \psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-\rho^2)g(\varphi)}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}d\varphi, \qquad (30.20)$$

或者調换 $P(r,\ \varphi)$ 与 $Q(\rho,\ \psi)$，即得

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)g(\psi)}{a^2-2ra\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi. \qquad (30.20a)$$

(30.20) 名为 Poisson 积分，是关于圆的 Dirichlet 問題之解的基本公式。

根据复变函数論中的 Cauchy 积分公式，在复平面上任意一点 $z=re^{i\varphi}$ 处的正則函数 $f(z)$ 的值，可用这个函数在包围 z 的任意閉曲綫 C 上的值 $f(\zeta)$

表示成为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{30.21}$$

现在特别把 C 选为以原点为中心以 a 为半径的圆，这么在圆周上就有 $\zeta=ae^{i\psi}$. 从而，因 $d\zeta=iae^{i\psi}\,d\psi=i\zeta\,d\psi$，(30.21) 就能写成

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\psi. \tag{30.22}$$

其次，因为 $z=re^{i\varphi}$ 关于圆的鏡象点是由 $z'=a^2/\bar{z}$ 給出的(图 30.3)，正則函数 $\zeta-a^2/\bar{z}$ 仅在圆 C 外的 z' 具有零点。于是从 Cauchy 定理可知

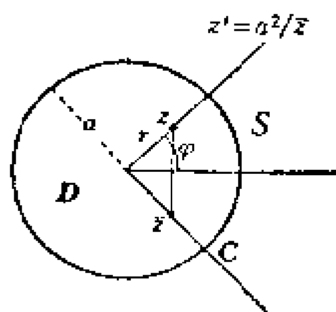


图　30.3

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a^2/\bar{z}}\,d\zeta. \tag{30.23}$$

如考虑(30.23)的共軛复量，因为

$$d\zeta=iae^{i\psi}\,d\psi=i\zeta\,d\psi,\qquad \bar{\zeta}=a^2/\zeta,$$

故能写成

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(-z)\overline{f(\zeta)}}{z-\zeta}\,d\psi. \tag{30.24}$$

从而作(30.22)与(30.24)之和，即得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\xi,\eta)\,d\psi+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\xi,\eta)d\psi. \tag{30.25}$$

但是 u, v 分别是 $f(\zeta)$ 的实部与虚部。若代入 $\xi=a\cos\psi$, $\eta=a\sin\psi$ 并比較两端的实部则得

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)u(\psi)d\psi. \tag{30.26}$$

另一面，因为

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(ae^{i\psi}+re^{i\varphi})(ae^{-i\psi}-re^{-i\varphi})}{(ae^{i\psi}-re^{i\varphi})(ae^{-i\psi}-re^{-i\varphi})}=\frac{a^2-r^2+2iar\sin(\varphi-\psi)}{a^2-2ar\cos(\varphi-\psi)+r^2},$$

把这个的实部代入于(30.26)就得到 Poisson 公式(30.20a).

§31　关于半无限圆柱面的 Helmholtz 方程的 Dirichlet 問題

1)　Helmholtz 方程

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0,$$

$$0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant z<\infty,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi, \tag{31.1}$$

試求其适合下列条件的解 $u(r, \varphi, z)$：

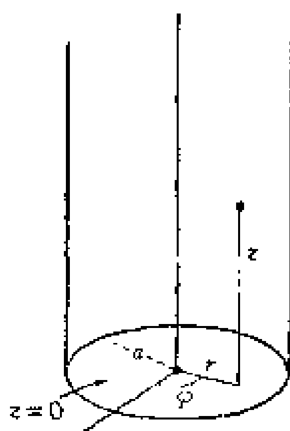


图 31.1

在圆柱面 $r=a$ 上，

$$u(a, \varphi, z)=0, \tag{31.2}$$

在底面 $z=0$ 上，

$$u(r, \varphi, 0)=g(r, \varphi). \tag{31.2'}$$

如在§8所見，(31.1)的变数能够分离，因此在 $r=0$ 处有限在 $r=a$ 上滿足条件(31.2)的解，根据(10.3)具有矢徑函数因子为

$$R(r)=J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right), \qquad J_n(\lambda_{n,l})=0, \tag{31.3}$$

与此配合的是

$$Z(z)=e^{\pm\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-\lambda^2}\,z}, \quad \Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases} \tag{31.3'}$$

考慮在 $z\to\infty$ 收斂的形如

$$\Gamma_1(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta)$$

$$=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}$$

$$\times e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-\lambda^2}(z-\zeta)}, \ \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1, 2, 3, \cdots \tag{31.4}$$

的組合，假令級数（直到它的二阶偏导数）收斂的話，根据迭加原理，这确实是(31.1)的解。

在(31.3)内令 $r=a$，因为滿足 $J_n(\lambda_{n,l})=0$ 的根是 λ 的本征值，所以(31.2)成立。

如設 $z=\zeta$，从(25.15)及(25.16)得到

$$\Gamma_1(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta)=\frac{\delta(r-\rho)}{r}\delta(\varphi-\psi). \tag{31.5}$$

从而 $\Gamma_1(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta)=\Gamma_1(P, Q)$，若設边界为半无限圓柱的表面 S，則 $\Gamma_1(P, S)$ 适合方程

$$L_P[\Gamma_1(P, S)]=0, \quad S\in S,$$

而且

$$\Gamma_1(S, S')=\delta(S, S'), \quad S, S'\in \boldsymbol{S}.$$

因此，給定了边界值(31.2)的(31.1)的解，根据§19，定理与問題(2)的三維扩充可表为

$$u(r, \varphi, z)=\iint_{\boldsymbol{S}} \Gamma_1(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta)u(\rho, \psi, \zeta)\rho\, d\rho\, d\psi, \quad (\rho, \psi, \zeta)\in \boldsymbol{S}. \tag{31.6}$$

但是 $\boldsymbol{S}$ 是圍繞半无限圓柱面的側面及底面；如上所述，在側面上

$$\Gamma_1(a, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta)=0, \tag{31.7}$$

所以在 $\boldsymbol{S}$ 上的积分仅就底面

$$\boldsymbol{B}: \quad \zeta=0, \quad 0\leqslant\rho\leqslant a, \quad -\pi\leqslant\psi\leqslant\pi$$

取之就行了，这么就能决定

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &=\iint_{\boldsymbol{B}} \Gamma_1(r, \varphi, z; \rho, \psi, 0) g(\rho, \psi)\rho\, d\rho\, d\psi \\ &=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2} \\ &\quad\times e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}z}g(\rho, \psi)\rho\, d\rho\, d\psi, \quad \varepsilon_0=1, \ \varepsilon_n=2, \\ &\qquad n=1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{31.8}$$

或者把适合边界条件(31.2)的解直接假定为

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(\varphi-\psi)\, d\psi\sum_{l=1}^{\infty}a_{n,l} \\ \times J\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}z}, \end{aligned} \tag{31.9}$$

如設 $z=0$，則得

$$u(r, \varphi, 0)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(\varphi-\psi)\, d\psi\sum_{l=1}^{\infty}a_{n,l}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right). \tag{31.10}$$

把 $g(r, \varphi)$ 关于 φ 作 Fourier 展开，并关于 r 作 Fourier-Bessel 展开，而得表达式

$$\begin{aligned} g(r, \varphi)=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\, d\psi\int_0^a J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right) \\ \times J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)g(\rho, \psi)\rho\, d\rho, \quad \varepsilon_0=1, \ \varepsilon_n=2, \ n=1, 2, \cdots, \end{aligned} \tag{31.11}$$

將两者比較，即能决定

$$a_{n,l}=\frac{2}{a^2\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)g(\rho,\psi)\rho\,d\rho, \qquad (31.12)$$

把(31.12)代入于(31.9)其結果就是(31.8)。

2) **Helmholtz 方程的軸对称的解** 是由

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0, \quad 0<r<a,\ 0<z<\infty \qquad (31.13)$$

給出的，对于此解 $u(r,z)$，考慮

在以对称軸为軸的半无限圆柱面 $0\leqslant z<\infty$ 上

1° 在側面

$$u(a,z)=f(z), \qquad (31.14)$$

2° 在底面

$$u(r,0)=g(r) \qquad (31.14')$$

这样的边界条件問題。如果已經求出了

$$L[u_1]=0,\quad u_1(a,z)=f(z),\quad u_1(r,0)=0, \qquad (31.15)$$

$$L[u_2]=0,\quad u_2(a,z)=0,\qquad u_2(r,0)=g(r) \qquad (31.15')$$

之解 u_1, u_2，那末这个問題的解就能由

$$u(r,z)=u_1(r,z)+u_2(r,z) \qquad (31.16)$$

給出。

u_1 解借助于 §8 定理与問題(2)的(a)，(e)組合形狀，可以給成

$$u_1(r,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r)}{J_0(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,a)}\sin\lambda z\,d\lambda\int_0^\infty f(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta. \qquad (31.17)$$

当这个积分(直到它的二阶偏导数)收斂时，(31.17)确是所求的解。

$u_1(r,0)=0$ 从 $\sin\lambda z$ 之項自然成立。

如設 $r=a$，从 Fourier 积分定理(11.2c)即知

$$u_1(a,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda z\,d\lambda\int_0^\infty f(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta=f(z).$$

u_2 是这么得来的：在(31.3)的形式中，因其与 φ 无关，把設 $n=0$ 之形状的初等解迭加而得

$$u_2(r,z)=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^\infty \frac{J_0\left(\lambda_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_1(\lambda_l)\}^2}e^{-\sqrt{(\lambda_l/a)^2-k^2}\,z}\int_0^a \rho g(\rho)J_0\left(\lambda_l\frac{\rho}{a}\right)d\rho.$$

它在与前者相同的收斂性的条件下也确实是解。如設 $r=a$，从 $J_0(\lambda_l)=0$ 可知(31.15′)的第一个边界条件自然成立。又設 $z=0$ 则成

$$u_2(r,\ 0)=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\lambda_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_1(\lambda_l)\}^2}\int_0^a \rho g(\rho)\,J_0\left(\lambda_l\frac{\rho}{a}\right)d\rho,$$

右端是 Fourier-Bessel 展开(10.12)的 $\nu=0$ 的特殊情況，且等于 $g(r)$.

§32　具有軸对称性的 Poisson 方程的解

取以对称軸为 z 軸的圓柱面坐标，Poisson 方程就能写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ z).\qquad(32.1)$$

因为这是无限空間的場合，首先利用 Fourier 积分定理(11.2)把 $f(r,\ z)$ 表示为

$$f(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}\,d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}f(r,\ \zeta)e^{-i\varkappa\zeta}\,d\zeta,\quad -\infty<z<\infty,\qquad(32.2)$$

再利用 Fourier-Bessel 积分定理(11.17)，把 $f(r,\ \zeta)$ 表示为

$$f(r,\ \zeta)=\int_0^{\infty}kJ_0(kr)dk\int_0^{\infty}\rho f(\rho,\ \zeta)J_0(k\rho)d\rho.\qquad(32.3)$$

因之，結果把 $f(r,\ z)$ 写成关于 z 的 Fourier 积分，关于 r 的 Fourier-Bessel 积分形状的四重积分:

$$f(r,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\varkappa\zeta}\,d\zeta\int_0^{\infty}kJ_0(kr)\,dk\int_0^{\infty}\rho f(\rho,\ \zeta)J_0(k\rho)d\rho,$$
$$(32.4)$$

与此相应，假定

$$u(r,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\varkappa\zeta}\,d\zeta\int_0^{\infty}kJ_0(kr)\,dk\int_0^{\infty}\rho U(\rho,\ \zeta)J_0(k\rho)d\rho,$$
$$(32.5)$$

且如考虑到 $J_0(kr)$ 适合

$$\frac{d^2J_0(kr)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_0(kr)}{dr}-k^2J_0(kr)=0,$$

則得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\varkappa\zeta}\,d\zeta\int_0^{\infty}kJ_0(kr)\,dk\int_0^{\infty}\rho(k^2+\varkappa^2)U(\rho,\ \zeta)J_0(k\rho)d\rho$$
$$(32.6)$$

之关系，因此，把(32.4)，(32.6)代入于(32.1)，比較其对应項，即得关系式

$$U(\rho, \zeta)=\frac{f(\rho, \zeta)}{k^2+\varkappa^2}. \tag{32.7}$$

于是把(32.7)代入于(32.5)即得

$$u(r, z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varkappa(z-\zeta)}d\zeta\int_0^{\infty} k\, dk\int_0^{\infty} \frac{\rho f(\rho, \zeta)}{k^2+\varkappa^2} J_0(kr)J_0(k\rho)d\rho. \tag{32.8}$$

現在設想 Poisson 方程的右端即电荷的分布：只限于半徑 $r=a$ 之圓柱面上，而且，关于 z 以面密度 $\sigma(z)$ 分布着，这时能設

$$f(r, z)=2\sigma(z)\frac{\delta(r-a)}{r}. \tag{32.9}$$

且关于 ρ 的积分为

$$\int_0^{\infty} \rho \frac{\delta(\rho-a)}{\rho} J_0(kr)J_0(k\rho)d\rho=J_0(kr)J_0(ka). \tag{32.10}$$

故(32.8)成为

$$u(r, z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varkappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2} k\, dk. \tag{32.11}$$

此地出現的无限积分可用变形的圓柱函数表成

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2} k\, dk=\begin{cases} K_0(|\varkappa| r)I_0(|\varkappa|a), & a<r, \\ K_0(|\varkappa|a)I_0(|\varkappa|r), & r<a. \end{cases} \tag{32.12}$$

这个积分，如以 $(-\infty, +\infty)$ 代替 $(0, \infty)$ 之区間的話，就成为

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2} k\, dk=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2} k\, dk. \tag{32.13}$$

这里的 $H_0^{(1)}$ 是第一种 Hankel 函数

$$H_0^{(1)}(z)=J_0(z)+iN_0(z), \tag{32.14}$$

把右端关于区間 $(-\infty, 0)$ 的部分利用关系式

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(-z)&=-H_0^{(2)}(z) \\ &=-J_0(z)+iN_0(z) \\ &=H_0^{(1)}(z)-2J_0(z) \end{aligned} \tag{32.15}$$

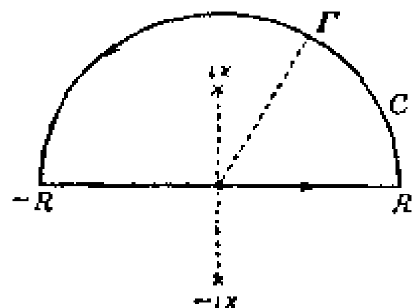


图 32.1

变形后，出現 $H_0^{(1)}(kr)$ 的部分相消为 0，仅剩下代替 $H_0^{(1)}(kr)$ 而出現 $J_0(kr)$ 的部分，这么就証实了 (32.13) 成立。对于 $(-\infty, \infty)$ 的积分可以这样計算：在图 32.1 的 k 平面上，考虑关于实区間 $(-R, R)$ 与上半面的半圓 Γ 所組成之封閉曲綫 C 上的复值积分

$$\int_C \frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2}\, k\, dk, \tag{32.16}$$

当 $R\to\infty$ 时的极限即是所求的。这时从 Hankel 函数及 Bessel 函数的漸近展开式

$$H_0^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}, \tag{32.17}$$

$$J_0(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}}{2} \tag{32.17'}$$

可知在上半面即 $\Im(k)>0$，$H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)$ 随同 $|k|\to\infty$ 出現 $e^{-J(k)(r-a)}$ 以及 $e^{-J(k)(r+a)}$ 之項，后者当然于 $\Im(k)>0$ 时指数函数性地趋近于 0，于是，留下成問題的就剩前一项了，若 $r>a$，結果它也是指数函数性地趋近于 0，于是沿半圆 Γ 的部分收斂于 0．从而于 $R\to\infty$ 的极限(32.16)給出我們所求的实积分。

另一面(32.16)自身因殘数定理，則成

$$\int_C \frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2}\, k\, dk = 2\pi i \operatorname{Res}(i|k|)． \tag{32.18}$$

但 $\operatorname{Res}(i|\varkappa|)$ 是被积函数在 C 內唯一极点 $k=i|\varkappa|$ 的殘数，故

$$\lim_{k\to i|\varkappa|}(k-i|\varkappa|)\frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\varkappa^2}\, k = \frac{H_0^{(1)}(i|\varkappa|r)J_0(i|\varkappa|a)}{2}$$

$$= \frac{K_0(|\varkappa|r)I_0(|\varkappa|a)}{\pi i}． \tag{32.19}$$

这里曾用圓柱函数与变形的圆柱函数之間的关系

$$I_0(z)=J_0(iz), \qquad K_0(z)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz) \tag{32.20}$$

作了变形。由此即得(32.12)的第一关系。从以上計算可知，当 $r<a$ 时把 r 与 a 对换了的 $H_0^{(1)}(ka)J_0(kr)$ 作同样的計算，沿 Γ 的积分消失，从殘数的計算就能导致(32.12)的下一式。本来在(32.13)左端的积分作 $r\rightleftarrows a$ 的对換就得到下一式乃是当然的。

由此可見，

$$u(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\varkappa\begin{Bmatrix}K_0(|\varkappa|r)I_0(|\varkappa|a)\\ K_0(|\varkappa|a)I_0(|\varkappa|r)\end{Bmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta,\quad \begin{matrix}a<r,\\ r<a.\end{matrix} \tag{32.21}$$

特別当圆柱面上的电荷分布均匀时，即 $\sigma(\zeta)=\sigma_0$ 时，根据 δ 函数的表达式(11.4)得

$$u(r, z)=2\sigma_0\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}K_0(|\varkappa|r)I_0(|\varkappa|a)\\ K_0(|\varkappa|a)I_0(|\varkappa|r)\end{matrix}\right\}\delta(\varkappa)d\varkappa,\quad \begin{matrix}a<r,\\ r<a\end{matrix}$$

$$=2\sigma_0\lim_{\varkappa\to 0}\left\{\begin{matrix}K_0(|\varkappa|r)\\ K_0(|\varkappa|a)\end{matrix}\right\},\quad \begin{matrix}a<r,\\ r<a.\end{matrix} \tag{32.22}$$

且知，$K_0(z)$ 在 $z\approx 0$ 对数性地发散：

$$K_0(z)\approx\log\frac{2}{z}-\gamma.$$

因之 $K_0(|\varkappa|r)\approx\log\frac{2}{|\varkappa|}-\gamma-\log r$，如果除掉这个无限大的附加常数，形如

$$u(r)=2\sigma_0\left\{\begin{matrix}\log\left(\frac{1}{r}\right)a, & a<r,\\ \log\left(\frac{1}{a}\right)r, & r<a\end{matrix}\right. \tag{32.23}$$

的对数势的项，是具有物理意义的。

特别使 $a\to 0$，考虑带电金属綫的情况。这时(32.12)成为

$$\int_0^{\infty}\frac{J_0(kr)}{k^2+\varkappa^2}k\,dk=K_0(|\varkappa|r), \tag{32.24}$$

于是得到相当于(32.21)的是

$$u(r, z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_0(|\varkappa|r)d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta. \tag{32.25}$$

进一步，当

$$\sigma(z)=\delta(z)$$

时，即于 $z=0$ 点电荷为 1 时

$$u(r, z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}K_0(|\varkappa|r)d\varkappa. \tag{32.26}$$

若把 $K_0(z)$ 的积分表达式

$$K_0(z)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(v+\frac{z^2}{v}\right)}\frac{dv}{v} \tag{32.27}$$

代入于(32.26)调换积分次序后，得

$$u(r, z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}v}\frac{dv}{v}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa z}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\varkappa r)^2}{v}}d\varkappa$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}v}\frac{dv}{v}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iz\varkappa-\frac{r^2}{2v}\varkappa^2}d\varkappa. \tag{32.28}$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\sqrt{\pi} \tag{32.29}$$

中，設 $a \to \frac{r}{\sqrt{2v}}$，$b \to iz$，則成

$$u(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2+r^2}{r^2}v}\frac{dv}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2+r^2}{r^2}u^2}du \quad (\sqrt{v} = u),$$

[在(32.29)利用 $b=0$ 之場合的公式計算之]

$$u(r, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}, \tag{32.30}$$

这么就得到与 Coulomb 势一致的結果。

§33 在有限圓柱內的热傳导問題

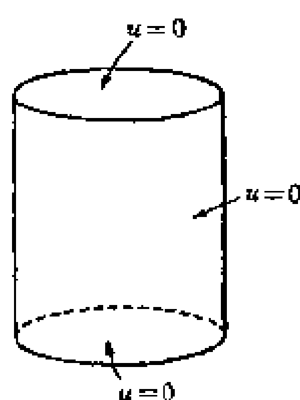


图 33.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{33.1}$$

边界条件：

$$u(a, \varphi, z, t) = 0, \tag{33.2}$$

$$u(r, \varphi, 0, t) = u(r, \varphi, h, t) = 0, \tag{33.2'}$$

初始条件：

$$u(r, \varphi, z, 0) = f(r, \varphi, z). \tag{33.3}$$

假設这个問題的初等解是

$$u(r, \varphi, z, t) = J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)\sin\frac{m\pi z}{h}e^{in\varphi}T(t), \tag{33.4}$$

这么时間項 T 所适合的微分方程就是

$$\frac{dT}{dt} = -\varkappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}T,$$

由此可得

$$T = e^{-\varkappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t}. \tag{33.5}$$

故按照常用的方法，假定

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{in\varphi}\sin\frac{m\pi z}{h}$$

$$\times e^{-\kappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t} \tag{33.6}$$

的形状后，从边界条件(33.2)即知

$$J_n(\lambda_{n,l})=0,$$

这就說 $\lambda_{n,l}$ 应該选为 $J_n(\lambda)$ 的第 l 个的正零点。又为了(33.2′)成立，选 m 为正整数就够了。

据初始条件要使

$$u(r,z,\varphi,0)=\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{in\varphi}\sin\frac{m\pi z}{h} \tag{33.7}$$

等于 $f(r,\varphi,z)$。首先[参照 Fourier 展开(10.1)]着眼于 φ 即得

$$\left.\begin{aligned}f(r,\varphi,z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\varphi},\\ c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\psi,z)e^{-in\psi}d\psi,\end{aligned}\right\} \tag{33.8}$$

其次从(10.1″)得

$$\left.\begin{aligned}f(r,\psi,z)&=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi z}{h},\\ D_m&=\frac{2}{h}\int_0^h f(r,\psi,\zeta)\sin\frac{m\pi\zeta}{h}d\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{33.9}$$

最后从(10.12)得

$$f(r,\psi,\zeta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2}{a^2}\frac{J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}r\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a\rho f(\rho,\psi,\zeta)J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\rho\right)d\rho. \tag{33.10}$$

由(33.7)～(33.10)得

$$A_{n,l,m}=\frac{1}{\pi ha^2\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho,\psi,\zeta)$$

$$\times J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}\rho}{a}\right)e^{-in\psi}\sin\frac{m\pi\zeta}{h}\rho\,d\rho\,d\zeta\,d\psi. \tag{33.11}$$

把(33.11)代入于(33.6)的結果即是所求的解。由这个例子可以明了，热傳导方程具有指数函数性衰退的时間項，因此假定其为 $T=e^{-\alpha t}$ 之形，然后分离时間項，解(33.1)的問題就归結为解 Helmholtz 方程的問題。从而在正文中虽不一一枚举热傳导的方程，但是所处理的 Helmholtz 方程各种問題的例子，却有助于解决相应的热傳导的問題。

§34 关于球的 Laplace 方程的 Dirichlet 問題

一般理論的形式完全与圆的 Dirichlet 問題相同，不过現在以使用有球对称性的球面坐标为便利，因为在球面坐标实行分离法也很簡单。

同于 §30 的以 Green 函数为中介的計算将見于习題 2，这里要說明的是直接从 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 以球面坐标施行分离变数法而获得的初等解的迭加解法。

在 §13 曾詳述了角部分的本征值問題能用球面函数解决。关于矢徑部分能够得到基本解❶

$$R_1(r)=r^n, \qquad R_2(r)=r^{-n-1}. \tag{34.1}$$

特别考虑內部問題，暫且不管 $R_2(r)$，設所求解的形状为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(r/a)^n Y_n(\theta,\varphi). \tag{34.2}$$

这里的 $Y_n(\theta,\varphi)$ 是球面函数，也就是对于偏微分方程(13.6)分离常数 λ 之本征值 $\lambda=n(n+1)$ 的本征函数，即(13.37)所給的相互独立的 $2n+1$ 个本征函数，并已見于 §13。

作为边界条件，在球面 $r=a$ 上給出

$$u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi) \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi), \tag{34.3}$$

解此 Dirichlet 問題能归結为由(34.2)，(34.3)所給的任意函数 $f(\theta,\varphi)$ 用完全正交球面函数系 $Y_n(\theta,\varphi)$ 的展开：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi). \tag{34.4}$$

由于属于不同本征值的本征函数相互正交，在此場合也是成立的，因之于(34.4)的两端乘以

$$D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')=\sum_{m=-n}^{n}\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\bar{\Phi}_m(\varphi)\bar{\Phi}_m(\varphi'), \tag{34.5}$$

然后在单位球面上取积分，即得

$$\begin{aligned}&\iint_S f(\theta,\varphi)D_m(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\\&=\sum_l\iint_S Y_l(\theta,\varphi)D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\\&=Y_n(\theta',\varphi') \quad [\text{依据 §13 定理与問題 (4)}]。\end{aligned}$$

---

❶ 因为 R 必須是 $R''+(2/r)R'-\{n(n+1)/r^2\}R=0$ 的解。

更换(θ, φ)与(θ', φ')的位置，則有

$$Y_n(\theta, \varphi)=\iint_S f(\theta', \varphi')D_n(\theta, \varphi;\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (34.6)$$

把这些代入于(34.2)，則得

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\iint_S f(\theta', \varphi')D_n(\theta, \varphi;\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$=\iint_S f(\theta', \varphi')\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n D_n(\theta, \varphi;\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (34.7)$$

这里的$D_n(\theta, \varphi;\theta', \varphi')$是由(34.5)給出的。

为了說明这个解(34.7)在边界$r=a$上确实等于所給的$f(\theta, \varphi)$，如果注意，在(34.7)中設$r=a$，即有

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\theta, \varphi;\theta', \varphi')=\delta(\theta, \varphi;\theta', \varphi') \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi) \qquad (34.8)$$

就够了[参照§13定理与問題(5)]。

【习題1】 变形如上所得的 Dirichlet 問題的解(34.7)，并用之証明(30.20)的三維类型的 Poisson 公式

$$u(r, \theta, \varphi)=\frac{a}{4\pi}\iint_S f(\theta', \varphi')\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\omega+r^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi' \qquad (a)$$

成立。

提 示 利用$D_n(\theta, \varphi, \theta', \varphi')=\dfrac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\omega)$[参照§13定理与問題(4)]并設$(r/a)=\rho$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n D_n(\theta, \varphi, \theta', \varphi')=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\rho^n P_n(\cos\omega),$$

利用关于 Legendre 多項式$P_n(z)$的母函数展开公式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\omega+\rho^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\omega)\rho^n,$$

即得

$$\left(1+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\omega+\rho^2}}=\frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\omega+\rho^2)^{3/2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\omega).$$

試把这些式子代入于(34.7)．

【习题 2】 于 Laplace 方程的基本解

$$G_0(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\omega + \rho^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

迭加 Laplace 方程的正則解而得的

$$G_1(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho^n}{r^{n+1}} - c_n r^n \right) P_n(\cos\omega),$$

若使其当 $r = a$ 时为 0，則得 Green 函数

$$G_1(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho^n}{r^{n+1}} - \frac{\rho^n r^n}{a^{2n+1}} \right) P_n(\cos\omega)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{R'} \right),$$

$$R = \sqrt{r^2 - 2\rho r\cos\omega + \rho^2}, \quad R' = \sqrt{r^2 - 2\rho' r\cos\omega + \rho'^2}, \quad \rho\rho' = a^2,$$

試証明之。由此出发，借助給出边值問題之解的公式，§19 定理与問題(1)，(b)，作同于 §30, 2) 的計算，就能导出习题 1 的 Poisson 公式(a).

§35 强迫振动問題(一)

1) 无端点之弦的强迫振动　一維强迫振动的方程由

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \tag{35.1}$$

給出。或者，使用 $F/c^2 = f$ 把它写成

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t), \quad f(x, t) = F(x, t)/c^2 \tag{35.2}$$

的形状。把(35.2)的右端写成 $f(x, t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ 的方程

$$L[G] \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{35.3}$$

的解 $G(x, t; \xi, \tau)$，卽波动方程的基本解。若这一基本解已求出，則依照 §19 的一般結論，强迫振动卽非齐次方程(35.2)的解，可利用基本解 G 用下面的关系式給出[参照(19.2i)]:

$$u(x, t)=\iint_D G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau. \tag{35.4}$$

无端点的一維問題的基本解 $G_0(x,t;\xi,\tau)$ 由(22.12)与(22.12')所給出，把它代入于(35.4)，作为二維区域 D 若取 $-\infty<x<\infty$，$0<t<\infty$ 之范圍，則 $G(x, t;\xi, \tau)$ 在图 35.1 的影綫部分到处为 0，在其余部分等于 $c/2$，因之

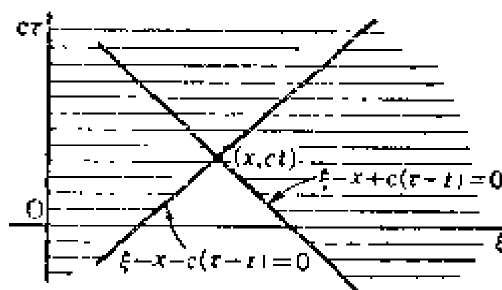


图 35.1

$$\begin{aligned}u(x, t)&=\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \\ &=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}\tag{35.5}$$

即是(35.2)的解。在(35.5)中，令 $t=0$，則有

$$u(x, 0)=0, \tag{35.6}$$

而且

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)=\frac{c}{2}\left\{\int_{x-0}^{x+0} f(\xi, \tau) d\xi+\int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi\right\},$$

第一项当然等于 0. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0. \tag{35.7}$$

由此可見(35.5)是适合初始条件(35.6)，(35.7)的强迫振动的解。

要求滿足一般初始条件

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\psi(x) \tag{35.8}$$

的解，只要对上面的解加上波动方程的滿足一般初始条件的解

$$u_0(x, t)=\frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}+\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi \tag{35.9}$$

就行了。

2）**半无限弦的强迫振动**　把无限长的弦或纜索代以半无限 $0<x<+\infty$ 的情况，这时在(35.3)的右端对 $\delta(x-\xi)$ 采用

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx \sin k\xi\, dk,\quad 0<x,\ 0<\xi, \tag{35.10}$$

或采用

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kx \cos k\xi\, dk,\quad 0<x,\ 0<\xi, \tag{35.11}$$

作同于 §22 的計算，就得出相当于(22.9)，(22.9′)的 Green 函数 G

$$G(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x, 0<\xi, t<\tau, \quad (35.12)\\ \dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin kx \sin k\xi \sin kc(t-\tau)}{k}, & 0<x, 0<\xi, \tau<t, \quad (35.12')\end{cases}$$

或者

$$G(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ 0<\xi,\ t<\tau, \quad (35.13)\\ \dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos kx \cos k\xi \sin kc(t-\tau)}{k}\,dk, & \\ & 0<x,\ 0<\xi,\ \tau<t. \quad (35.13')\end{cases}$$

于(35.13)令 $\xi=0$，則得

$$G(x,t;0,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (35.14)\\ \dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos kx \sin kc(t-\tau)}{k}\,dk, & 0<x,\ \tau<t. \quad (35.14')\end{cases}$$

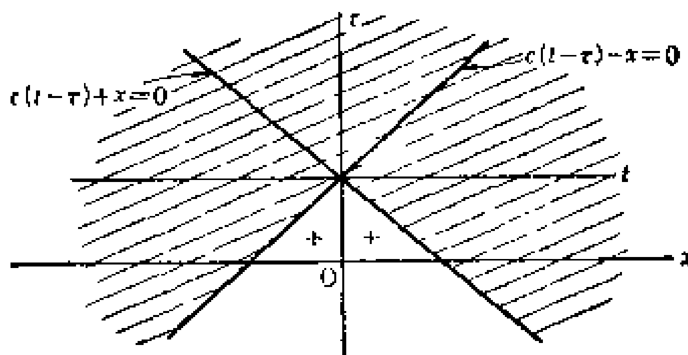


图　35.2

因为对(35.14′)能作同于(22.10)的計算，所以 G 在图 35.2 的影綫部分到处成立，并在其余部分等于 c。

考察

$$u(x,t)=\frac{1}{c}\int_0^t \frac{\partial G(x,t;0,\tau)}{\partial t} f(\tau)d\tau, \tag{35.15}$$

可知

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t}(x, t; 0, \tau)$$

$$=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau,\\ \dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos kx\cos kc(t-\tau)dk, & 0<x,\ \tau<t\end{cases}$$

$$=❶\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (35.16)\\ c\delta\{x-c(t-\tau)\}=\delta\left\{\tau-\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right\}, & 0<x,\ \tau<t. \quad (35.16')\end{cases}$$

因此

$$u(x, t)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<0, \quad (35.17)\\ \displaystyle\int_0^t\delta\left\{\tau-\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}f(\tau)d\tau=f\left(t-\frac{x}{c}\right), & \\ & 0<x,\ 0<t-\dfrac{x}{c}<t. \quad (35.17')\end{cases}$$

因为 $G(x, t; 0, \tau)\equiv G(x, t-\tau)$，所以

$$u(x,t)=\frac{1}{c}\int_0^t\frac{\partial G(x, t-\tau)}{\partial t}f(\tau)d\tau$$

$$=-\frac{1}{c}\int_0^t\frac{\partial G(x, t-\tau)}{\partial\tau}f(\tau)d\tau$$

$$=-\frac{1}{c}\left\{G(x, t-\tau)f(\tau)\Big|_0^t-\int_0^t G(x, t-\tau)f'(\tau)d\tau\right\}$$

$$=-\frac{1}{c}\left\{G(x, 0)f(t)-G(x, t)f(0)\right.$$

$$\left.-\int_0^t G(x, t-\tau)f'(\tau)d\tau\right\}.$$

由 $G(x, 0)=0$ 可知

$$u(x,t)=\frac{1}{c}G(x, t)f(0)+\frac{1}{c}\int_0^t G(x,t-\tau)f'(\tau)d\tau. \quad (35.18)$$

就 t 微分之，则成

---

❶ 从而适合 $\frac{1}{c}\frac{\partial G(x, 0)}{\partial t}=c\delta(x)$，在 $x\neq0$ 则有 $\frac{\partial G(x, 0)}{\partial t}=0$。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)=\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) f(0)+\frac{1}{c}\int_0^t \frac{\partial G(x, t-\tau)}{\partial t} f'(0) d\tau$$

$$+\frac{1}{c} G(x, 0) f'(t). \tag{35.19}$$

在(35.18)令 $t=0$，则得

$$u(x, 0)=\frac{1}{c} G(x, 0) f(0)=0, \tag{35.20}$$

在(35.19)中，令 $t=0$，则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) f(0)=c\delta(x) f(0), \tag{35.21}$$

在(35.17)中令 $x=0$，则得

$$u(0, t)=\begin{cases}0, & t<0, \\ f(t), & 0<t.\end{cases} \tag{35.22}$$

(35.15)所給的 $u(x, t)$ 有这样的意义：从适合初始条件

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=c\delta(x) f(0)$$

的解出发，令 u 在一端 $x=0$ 处，对于时間 $0<t$，发生大小如 $f(t)$ 之位移，则对于任意 $0<t$，就在任意点 x 处从(35.15)給出了波动的表达式❶。

这个結果和以前由 Duhamel 所发現的定理等价。

§36 强迫振动問題(二) 有限弦

現在考虑限定于有限区間 (a, b) 的弦或索，在此情况，Green 函数直接依賴于边界条件，因而对于方程 (35.3) 的右端的 $\delta(x-\xi)$，也必須作如下的变形——即从适合給定的边界条件

$$B_a[\varphi_n]=p(a)\varphi_n'(a)\sin\alpha-\varphi_n(a)\cos\alpha=0, \tag{36.1}$$

$$B_b[\varphi_n]=p(b)\varphi_n'(b)\sin\beta-\varphi_n(b)\cos\beta=0 \tag{36.1'}$$

的規范正交的本征函数 $\varphi_n(x)$：

❶ (35.15)所以是波动方程的解，由于 G 本身就是关于 $x, t (x\neq 0)$ 适合波动方程而規定的。

$$(\varphi_n(x), \varphi_{n'}(x)) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)dx = \delta_{n,n'} \tag{36.2}$$

选取其适当的組合，把 $\delta(x-\xi)$ 置换为

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(\xi), \quad a \leqslant x, \xi \leqslant b. \tag{36.3}$$

从而假定(35.3)的解 $G(x, t; \xi, \tau)$ 也能表成如下的形式：

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g(k_n, \omega)\varphi_n(x)e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega, \tag{36.4}$$

但 $\varphi_n(x)$ 是属于对应边界条件(36.1)，(36.1′)的方程

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0 \tag{36.5}$$

的本征值 k_x 的本征函数。特别令其两端为 $\pm l$，如取两端固定的边界条件

$$\varphi_n(-l) = 0, \quad \varphi_n(l) = 0, \tag{36.6}$$

则

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \varphi_n(x) = \sin\left\{\frac{n\pi}{l}x\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{36.7}$$

給出奇函数(反对称)的解

$$\varphi_n(-x) = -\varphi_n(x),$$

而

$$k_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}, \quad \varphi_n(x) = \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{36.8}$$

給出偶函数(对称)的解

$$\varphi_n(-x) = \varphi_n(x). \tag{36.9}$$

特别在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 的规范正交系成为

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{36.10}$$

或成为

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{36.11}$$

于是

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l}, \quad 0 \leqslant x, \xi \leqslant l, \tag{36.12}$$

或

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{l}\right\} \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}\right\}, \quad 0 \leqslant x, \xi \leqslant l. \tag{36.12′}$$

其結果，相当于无端点場合之(22.5)的是

$$g(k_n,\ \omega)=-\frac{1}{(\omega/c)^2-k_n^2},\tag{36.13}$$

从而

$$G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=-\frac{2c^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(t-\tau)\omega}}{\omega^2-\omega_n^2}d\omega,$$

$$\omega_n=k_nc=\frac{n\pi c}{l},\tag{36.14}$$

或者

$$G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=-\frac{2c^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right\}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}\right\}$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(t-\tau)\omega}}{\omega^2-\omega_n^2}d\omega,$$

$$\omega_n=k_nc=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi c}{l},\tag{36.14'}$$

仿照(22.8)的計算方法，对(36.14)与(36.14′)可作如下的計算：

$$G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=\frac{2c^2}{l}\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (36.15)\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_nx\cdot\sin k_n\xi\sin\{k_nc(t-\tau)\}}{k_nc}, & \\ \qquad k_n=\dfrac{n\pi}{l},\ \tau<t, & (36.15')\end{cases}$$

$$G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)=\frac{2c^2}{l}\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (36.16)\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_nx\cos k_n\xi\sin k_nc(t-\tau)}{k_nc}, & \\ \qquad k_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{l},\ \tau<t. & (36.16')\end{cases}$$

为了簡单起見，考察在(36.16)的$\xi=0$的情况：

$$G(x,\ t;\ 0,\ \tau)=\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (36.17)\\ \displaystyle\frac{2c^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_nx\sin k_nc(t-\tau)}{k_nc}, & \tau<t. \quad (36.17')\end{cases}$$

仿照§35, 2)，能够証明：从(36.17)作出的

$$u(x,\ t)=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}\frac{\partial G(x,\ t;\ 0,\ \tau)}{\partial t}f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^{t}\frac{\partial G(x,\ t;\ 0,\ \tau)}{\partial t}f(\tau)d\tau\tag{36.18}$$

是一維波动方程的解，适合初始条件

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=c\delta(x)f(0), \tag{36.19}$$

并且适合边界条件

$$u(0, t)=f(t), \quad u(l, t)=0. \tag{36.20}$$

§ 37 Duhamel 定理的应用

1) **一般定理** 不限于波动方程,对于更广义的方程

$$L[u]-p_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-p_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

这里

$$L[u]=q_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+r(x)u, \tag{37.1}$$

则称为基本方程,它的适合初始条件

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0 \text{❶} \tag{37.2}$$

及边界条件

$$u(0, t)=f(t), \quad t>0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(a, t)+hu(a, t)=0, \quad t>0 \tag{37.3}$$

的解 $u(x, t)$,可以用和(35.15),(36.18)同形式的积分

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}f(\tau)d\tau \tag{37.4}$$

給出。这一定理即所謂 **Duhamel 定理**。

到目前已超过预先計划的頁数,因此不能詳述我們的方法和經典的 Duhamel 方法之間的关联,現在仅就波动与热傳导的特例简述一下。

---

❶ $p_0(x)=0$ 时,(37.1)关于 t 的偏微导数就是一阶的,因此 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 之条件可以廢除。热傳导方程即其一例。

波动的場合象 § 35, § 36 所說那样，作为 U 取 Green 函数 $G(x, t-\tau)$ 即可。但是經典的方法对于 Duhamel 定理的函数 $U(x, t-\tau)$ 是加了一些附带条件的，它应該适合基本方程及初始条件，即是关于变数 x, t 的方程

$$L[U]-p_0(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-p_1(x)\frac{\partial U}{\partial t}=0 \qquad (37.5)$$

之解 $U=U(x, t; \tau)=U(x, t-\tau)$，并滿足初始条件

$$U(x, 0)=0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)=0❶, \qquad (37.6)$$

及 a 处的边界条件

$$\frac{\partial U}{\partial t}(a, t)+hU(a, t)=0, \quad t>0, \qquad (37.7)$$

此外且給出了端点 $x=0$ 处隨时間而变动的条件

$$U(0, t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ 1, & \tau<t,\end{cases} \qquad (37.8)$$

由此决定的函数才是 U. 現在使用 δ 函数，由

$$L[U]-p_0(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-p_1(x)\frac{\partial U}{\partial t}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$$

解出 $U=U(x, t; \xi, \tau)\equiv U(x-\xi, t-\tau)$，再令 $\xi=0$，而得到 $U(x, t-\tau)$. 在前述波动方程的例子，已証实 $G(x, t-\tau)$ 适合 (37.6)，(37.7)之条件。最后关于(37.8)，因从(35.16)可得关系

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G(x, t-\tau)}{\partial t}=\delta\left\{\tau-\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\},$$

令此式中 $x=0$，再对 t 积分，积分区間至少包含着 τ，就能看出，$G(x, t-\tau)$ 在 $t-\tau=0$ 处发生如(37.8)所給的跳跃。这說明了 § 35 的 G 恰巧与 (37.5)～(37.8)所定义的一致。

Duhamel 的积分(37.4)是适合上列一切条件之解，其証明完全平行于波动方程的場合，因此可作为讀者的习题。

2) 对热傳导方程的应用 在热傳导方程的場合，Green 函数虽不同于上述之 U 但有极其密切的关系。按照 Duhamel 定理，用下列的方法能求一維热傳导方程适合条件(37.8)的解。

---

❶ 一阶时則應除。

关于热傳导方程，于时刻 $t=\tau$ 取边界值 $\varphi(x)$ 的解，根据(27.11)可由

$$U(x, t-\tau)=\frac{1}{2\varkappa}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\varphi(\xi)d\xi \qquad (37.9)$$

給出。特别选取

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)=2, \quad -\infty<x<0,\\ &\varphi(x)=0, \quad 0<x<+\infty\end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

时，对于 $0<x$ 有 $U(x, 0)=0$，对于 $x<0$ 有 $U(x, 0)=2$，这么从对称性可以設想在 $x=0$ 平均值为 1. 实际这么作就有

$$U(x, t-\tau)=\frac{1}{\varkappa}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{t-\tau}}}^{\infty}e^{-u^2}du, \qquad (37.11)$$

而且

$$U(0, t-\tau)=1, \quad \tau<t$$

成立。如果这么选取 U 并对于 $\tau>t$ 补充上 $U\equiv 0$，卽得

$$U(x, t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{t-\tau}}}^{\infty}e^{-u^2}du, & \tau<t, \quad (37.12)\\ 0, & t<\tau, \quad (37.12')\end{cases}$$

(37.8) 及(37.6)的第一条件皆成立❶。所以

$$u(x, t)=\int_0^t\frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}f(\tau)d\tau\,❷, \qquad (37.13)$$

---

❶ 第二条件在关于 t 成为一阶的热傳导問題时则无意义。

❷ (37.11)的 U 适合函数方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{-x}{2(t-\tau)}\frac{\partial U}{\partial x}.$$

因此若設

$$u(x, t)=-\int_0^t\frac{x}{2(t-\tau)}\frac{\partial U}{\partial x}f(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{xe^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)2\varkappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\tau)d\tau$$

也能得出(37.13)。

(37.13)則与使用伴随 Green 函数所导出的 (29.17a) 一致。或者假令 $x/2\varkappa\sqrt{t-\tau}=v$，則有

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-v^2}f\left(t-\frac{x^2}{4\varkappa^2v^2}\right)dv, \quad (37.13a)$$

此解确实适合条件

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=f(t). \qquad (37.14)$$

第5章 扩散現象[1]

§38 扩散問題的一般考察

如果溶液中各点的濃度不同，就有溶质从濃度較大之处流向濃度較小之处。如果物体内各点的温度不同，就有热量从温度較高之处流向温度較低之处。又如在反应堆中，当中子的密度不均匀时，也发生中子的运动。凡是由物理量的密度不同而产生的运动，总称为扩散。除上述各例之外，还有种种的扩散現象。例如在太空中，由于有星体存在不仅有物质粒子的扩散，而且还能出現光能的扩散。

扩散現象可以用种种的宏观方法来处理，使用与热傳导方程有同一形式的方程来处理也是这些方法中的一种，現在以中子在物质中的扩散为例来說明这种方法。假設在时刻 t 在一点 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 的中子的密度为 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$，由于密度不同就要发生中子的流动，若用矢量 $\boldsymbol{J}$ 表示中子流，就可以假定

$$\boldsymbol{J} = -D \operatorname{grad} \rho, \tag{38.1}$$

D 叫做扩散系数。为了使問題簡单，先不考虑中子在物体中被吸收的情况，假設在物体中产生的中子的密度为 $q(\boldsymbol{r}, t)$，则由于中子个数守恒，下式

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\int J_n d\sigma + \int q \, d\tau$$

必成立。这里的 $d\tau$ 和 $d\sigma$ 分别表示体积元素和面积元素，n 表示

---

[1] 第5章，第6章由宮島执笔。

外法綫。把这个关系式写为微分形式则为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\operatorname{div} \boldsymbol{J}+q, \tag{38.2}$$

把(38.1)代入上式而且假定 D 为常数，則得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=D \nabla^{2} \rho+q. \tag{38.3}$$

若令 D 为 k^2，則上式和 § 23 的热傳导微分方程一致。

如果假定在单位时間内中子在物体中被吸收的个数与密度 ρ 成正比，即假定在单位时間内被吸收的个数为 $\alpha^2\rho$，則所得的方程不是(38.3)而是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=D \nabla^{2} \rho-\alpha^{2} \rho+q. \tag{38.4}$$

在一維的場合，在(23.10)中求得的 Green 函数

$$G(x, t ; 0,0)=\frac{e^{-\frac{x^{2}}{4 D t}}}{2 \sqrt{\pi D t}} u(t) \tag{38.5}$$

具有这样的物理意义：如果在时刻 $t=0$ 的瞬間在原点 $x=0$ 处突然有 $q(x, t)=\delta(x)\ (t>0)$ 的中子源出現，則在时刻 t 在点 x 处的中子密度可以用 $G(x, t, 0, 0)$ 表示。$u(t)$ 是不連續函数：$t<0$ 时其值为 0，$t>0$ 时其值为 1.

这个結果看来有点不合理，因为它指的是不論 t 为怎样小的正值，在 $x\neq 0$ 处的中子密度就不等于 0. 也就是說不論时間如何短暫必有中子能到达与中子源有有限距离之点，这就等于說中子有无限大的速度。所以产生这种結果，是因为我們作了这样的假定：只要中子的密度不同，就立即出現(38.1)所表示的中子流。这是用扩散方程研究某些实际扩散現象的弱点之一。

現在考察物体不是无限扩大而是具有边界的情况。即使边界外沒有物质存在，中子也能通过边界流出，同时也能通过边界流

入。为了描述这种情况而把中子集团看做流体是不适宜的，需要用适当的方法把粒子的运动作追踪的描述。在边界上还需要一种能够把流出粒子和流入粒子加以区别的描述。

用热傳导方程描述扩散現象虽然有一些缺点，但是比較便利，对于复杂的問題也容易估計大致的結果，还不失为一种有效的方法。另外还需要补充上边界条件，这时尽量使边界条件与实际情况符合以补救一些方程自身的弱点。在下一节就用輸送方程来討論这样的問題。

§39 分布函数与輸运方程

物体内的中子可以沿着各种方向运动，若与物质的原子发生碰撞，就可能发生散射，或被吸收或减小速度。为了使問題簡单，先不考虑中子被吸收或减小速度的情形，并且假定：如果中子发生散射，虽然运动方向变更但是速度不变。并且碰撞后的散射方向与碰撞前的运动方向无关。

設中子的速率为 v，在物质中的平均自由程为 λ，这意味着当中子通过一段短的路程 l 时发生碰撞的概率为 l/λ.

設在点 $\boldsymbol{r}$，在体积元素 $d\tau$，及立体角 $d\Omega$ 内，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子的个数为 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)d\tau\, d\Omega$. 这里的 f 叫做分布函数。有些中子因为碰撞而离开了这个区域，有些其他方向的中子因碰撞而进入这个区域，也有一些中子不是因为碰撞而离开或进入这个区域。因此这个区域内的中子的个数随着时間的改变而发生变化。

在单位时間內因碰撞而减少的个数为 $(v/\lambda)f\,d\tau\,d\Omega$. 在空間体积 $d\tau$ 内在单位时間內所发生的碰撞总数为 $(v/\lambda)d\tau\int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t)d\Omega'$，而其中被速度为 $\boldsymbol{v}$ 的中子所散射的占 $d\Omega/4\pi$ 的比率。还有不因为碰撞而进入此空間的中子，其个数为 $-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f\,d\tau\,d\Omega$，于是得到

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$$

$$=-\frac{v}{\lambda}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{v}{\lambda}\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',t)d\Omega'+q. \quad (39.1)$$

这里的 q 是中子源的强度。这就是输运方程。

分布函数 f 和前节所述的中子密度有简单的关系，即

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)d\Omega. \quad (39.2)$$

中子流矢量 $\boldsymbol{J}$ 也和 f 有关，流过某一表面的中子的个数可以用下式給出：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\int \boldsymbol{v}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)d\Omega. \quad (39.3)$$

例如

$$J_x^+=\int_{v_x>0}v_xf\,d\Omega \quad (39.4)$$

是通过垂直于 x 軸的单位面积从 $-x$ 侧向 $+x$ 侧流动的中子的个数。J_x^- 也可以用同样方法求得。(39.3)的 J 的 x 分量表示 J_x^+ 和 J_x^- 的代数和。

当粒子在离边界比 λ 还远的地方发生散射时，散射后粒子的分布和方向的关系不是十分密切的；因此取近似式

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\sim\frac{1}{4\pi}\rho(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{4\pi}\varepsilon(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho(\boldsymbol{r},t) \quad (39.5)$$

而加以考察，可以看到第二项比第一项小。把它代入(39.1)然后对方向积分，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)+\frac{\varepsilon}{3}v^2\nabla^2\rho(\boldsymbol{r},t)$$

$$=-\frac{v}{\lambda}\rho(\boldsymbol{r},t)+\frac{v}{\lambda}\rho(\boldsymbol{r},t)+\int q\,d\Omega=\int q\,d\Omega. \quad (39.6)$$

为了决定 ε 还需要另一个方程。为此，把 $\boldsymbol{v}$ 与 $\nabla\rho$ 的夹角 θ 的余弦 $\cos\theta$ 乘于(39.1)，然后就 $d\Omega$ 取积分，这时如果不考虑时間的

变化而設想中子源的函数 q 大体以球对称的方式放出中子，则得

$$\frac{1}{3}v|\nabla\rho| = -\frac{v^2\varepsilon}{3\lambda}|\nabla\rho|,$$

由此可得

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{v}. \tag{39.7}$$

把它代入(39.6)则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{3}\lambda v\nabla^2\rho + q_0, \tag{39.8}$$

在扩散方程中若令吸收为 0 就和上面結果一致。由此可知宏观的扩散系数 D 和平均自由程有如下的关系：

$$D = \frac{1}{3}\lambda v. \tag{39.9}$$

为了把扩散现象用微分方程来描述，首先要求 $\lambda|\mathrm{grad}\,\rho|$ 小于 ρ；而在平均自由程的范围，密度的变化很小，这样的要求当然可以实现。緩中子在石墨中的平均自由程約为 2.7 厘米，在水中約为 0.4 厘米。在导出(39.7)时，省略了时間这项，这样就要求 $\frac{\lambda}{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 小于 ρ。$\frac{\lambda}{v}$ 是两次碰撞之間的平均时間，如果在碰撞之前密度有了很大的变化，上面的近似就不适宜了。

把(39.7)代入(39.5)则得

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \sim \frac{1}{4\pi}\left\{\rho(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\lambda}{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho(\boldsymbol{r}, t)\right\}. \tag{39.10}$$

现在利用这个結果来求 $J_x^\pm$。設 x 为极坐标的軸，以 θ, φ 为极坐标，则

$$J_x^+ = \frac{1}{4\pi}\iint v\cos\theta\left\{\rho - \lambda\left(\cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} + \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial y} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{v}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\cdot\rho - \lambda\cos^2\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\sin\theta\, d\theta = \frac{v}{4}\rho - \frac{v\lambda}{6}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

用同样的方法也能求得 J_x^-，由此可知

$$J_x^{\pm}=\pm\frac{v}{4}\rho-\frac{\lambda v}{6}\frac{\partial\rho}{\partial x}.\tag{39.11}$$

于是

$$J_x=J_x^{+}+J_x^{-}=-\frac{\lambda v}{3}\frac{\partial\rho}{\partial x}=-D\frac{\partial\rho}{\partial x},\tag{39.12}$$

对全体的中子流来說和宏观的假定(38.1)是一致的。

关于假設(39.10)，从它的导出方法来看，仅在离边界相当远的地方才是正确的，但是它对边界条件能給出大致的估計。取 x 軸垂直于边界面而指向內部，并假設中子只从物体流向真空而不从真空流向物体。有这样的边界时，在边界 $x=0$ 处 J_x^+ 为 0. 如果认为(39.10)一直到边界的地方都正确，则由 $J_x^+=0$ 可得

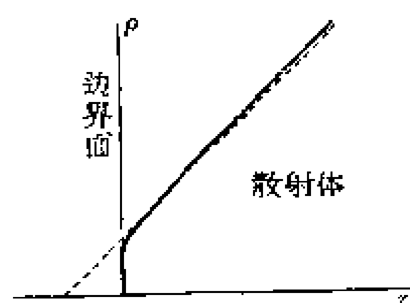


图 39.1　实綫是正确的解，虚綫是扩散方程的解

$$\rho=\frac{2}{3}\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\quad(x=0).\tag{39.13}$$

这表示如果将边界以一定的斜率 $\frac{d\rho}{dx}$ 向外伸延，在距离为

$$\delta=\frac{2}{3}\lambda\tag{39.14}$$

之处 ρ 变为 0. 边界条件(39.13)虽然是第三种边界条件，但是当物体比 λ 大时，它的意义可以扩充，即設想在物体的外側与物体表面距离为 d 的地方有一假想边界面，在这里 ρ 的值为 0；时常用这样的条件代替上述边界条件，这样就把边界条件化为第一种了。严密地說，这样的假設并不正确。(39.14)中的 δ 的值，虽然是在(39.10)一直到边界都正确的条件下求出的，但是在边界的附近并不是良好的近似。而在多数的情况下求中子流是个重要的問題，

因此正确地求出边界上的 ρ 或 $\frac{d\rho}{dx}$，不如正确地求出 J 有意义。利用(39.13)就能得到比較精确的 J. 为了闡明这些問題，我們要考慮輸运方程的解法。

§ 40　輸运方程的解

为了求輸运方程在边界附近的解，考慮以无限平面为边界的扩散問題。取垂直于平面的 x 軸，假設散射体一直伸張到 $x=+\infty$，并假設在散射体内部极为深远之处存在着中子源，且有流向表面的均匀中子流 $vJ\ (J<0)$.

設 x 軸与中子速度間的夾角为 θ，令 $\cos\theta=\mu$，則稳定流的輸运方程为

$$\mu\frac{\partial f(x,\ \mu)}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda}f(x,\ \mu)+\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}f(x,\ \mu')d\mu'. \quad (40.1)$$

如果以 λ 为单位来度量長度，并令 $\xi=x/\lambda$，則得

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{\partial f(\xi,\ \mu)}{\partial\xi}&=-f(\xi,\ \mu)+\frac{1}{2}\rho(\xi),\\ \rho(\xi)&=\int_{-1}^{1}f(\xi,\ \mu)d\mu.\end{aligned}\right\} \quad (40.2)$$

且中子流 J 为

$$J=\int_{-1}^{1}\mu f(\xi,\ \mu)d\mu, \quad (40.3)$$

由(40.2)可以知道，这是与 ξ 无关的常数。

在離边界充分远的地方，f 的值隨着 ξ 的增大而增大。为了决定它的漸近式，假設

$$f(\xi,\ \mu)\sim\frac{1}{2}\rho(\xi)+\frac{3}{2}J\mu \quad (\xi\to\infty). \quad (40.4)$$

这个假設滿足(40.3)。代入(40.2)后如果能得到

$$\rho=\rho_0-3J\xi \quad (40.5)$$

的关系，就可以知道这个假設成立。这个渐近解只在离边界远的地方成立，在离边界近处由于有中子流出，中子的密度就要减小。

(40.2)也能写成积分方程的形式。它可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[e^{\frac{\xi}{\mu}}f(\xi,\mu)]=\frac{1}{2}\frac{\rho(\xi)}{\mu}e^{\frac{\xi}{\mu}}.$$

$\mu>0$ 时因为沒有入射中子所以 $f(0,\mu)=0$，从而

$$f(\xi,\mu)=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\xi}e^{\frac{\xi'-\xi}{\mu}}\rho(\xi')d\xi'\quad(\mu>0).$$

当 $\mu<0$ 而 $\xi\to\infty$ 时，ρ 成为 ξ 的一次函数，所以 $e^{\frac{\xi}{\mu}}f$ 趋近于 0，于是

$$f(\xi,\mu)=\frac{1}{2\mu}\int_{\infty}^{\xi}e^{\frac{\xi'-\xi}{\mu}}\rho(\xi')d\xi'\quad(\mu<0).$$

回想 ρ 的定义就知道

$$\rho(\xi)=\int_{-1}^{1}f(\xi,\mu)d\mu=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}E_1(|\xi'-\xi|)\rho(\xi')d\xi',\quad(40.6)$$

这里的 $E_1(y)$ 是

$$E_1(y)=\int_0^1\frac{d\mu}{\mu}e^{-y/\mu}=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t}e^{-yt}.\quad(40.7)$$

(40.6)是 Wiener-Hopf 型积分方程的一种；Milne 曾把它应用于星球中的光的扩散，所以又称为 Milne 方程。

問題 1 証明，如果从边界的外部有角分布为 $f(0,\mu,\varphi)$ ($\mu>0$，φ 是 x 周圍的角)的中子入射，則相当于(40.6)的积分方程为

$$\rho(\xi)=\rho_0(\xi)+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\rho(\xi')E_1(\xi'-\xi)d\xi',$$

其中

$$\rho_0(\xi)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(0,\mu,\varphi)e^{-\xi/\mu}d\mu.$$

如所周知，Milne 积分方程可以用 Laplace 变换来求解。现在就用 Laplace 变换直接求积分方程的解。

設 $f(\xi,\mu)$ 和 $\rho(\xi)$ 的 Laplace 变换分别为 $f_1(p,\mu)$ 和 $\rho_1(p)$，

即

$$\left.\begin{aligned} f_1(p,\ \mu) &= \int_0^\infty f(\xi,\ \mu)e^{-p\xi}d\xi, \\ \rho_1(p) &= \int_0^\infty \rho(\xi)e^{-p\xi}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{40.8}$$

这里假設 p 的实部 $\mathrm{Re}\,p$ 为正值。虽然沒有給出 f 和 ρ 在 $\xi<0$ 的范圍內的定义，为了便利假定它們在 $\xi<0$ 时为 0，于是如果知道了 Laplace 变換就能用

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \rho_1(p)e^{p\xi}\,dp \tag{40.9}$$

求出原来的函数。这里所取的 σ 是这样的数，当 $\mathrm{Re}\,p>\sigma$ 时 $\rho_1(p)$ 沒有奇异点。这样就显而易見，当 $\xi<0$ 时 $\rho(\xi)$ 为 0.

由上述的数式［(40.6)的前面的数式］知道，向外射出的中子的分布可由

$$f(0,\ \mu) = \frac{-1}{2\mu}\int_0^\infty \rho(\xi')\,e^{-\xi'/|\mu|}\,d\xi' = \frac{1}{\mu}\,\rho_1\!\left(\frac{1}{|\mu|}\right),\quad \mu<0 \tag{40.10}$$

求出。

用 $e^{-p\xi}$ 乘(40.2)，再积分即得

$$(1+p\mu)f_1(p,\ \mu) = \frac{1}{2}\,\rho_1(p) + \mu f(0,\ \mu), \tag{40.11}$$

由此求出 $f_1(p,\ \mu)$，然后对 μ 积分就能得到

$$\left[1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right]\rho_1(p) = \int_{-1}^{1}\frac{\mu f(0,\ \mu)}{1+p\mu}\,d\mu. \tag{40.12}$$

根据边界条件知道，右端的积分只从 -1 到 0 积分就够了。且設对数函数是在 $p=0$ 为 0 这么定义的解析函数。

因为 $f(0,\mu)$ 在 $\mu>0$ 为 0，所以 $\mu f(0,\mu)$ 若在 $-1<\mu<0$ 有界，则(40.12)的右端在 $\mathrm{Re}\,p<1$ 处为正则的。还有 $1-\dfrac{1}{2p}\log\dfrac{1+p}{1-p}$ 在 $-1<\mathrm{Re}\,p<1$ 为正则，而在 $p=0$ 处有二阶的零点。这么，如果

考虑

$$\frac{p^2-1}{p^2}\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)$$

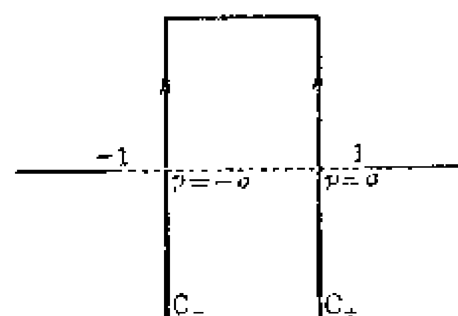


图　40.1

的話，它在 $-1<\mathrm{Re}\,p<1$ 内为正则，而在 $p=0$ 处不为 0，在无限远处趋近于 1．从而若取其对数

$$\log\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)\right],$$

則于 $-1<\mathrm{Re}\,p<1$ 内为正則，在无限远处成为 0．于是若用 Cauchy 积分表达式写出，就能分解为

$$\log\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)\right]=\log\Gamma_+(p)-\log\Gamma_-(p). \tag{40.13}$$

这里

$$\log\Gamma_\pm(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mp}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t-p}, \tag{40.14}$$

$C_\pm$ 是图 40.1 所表示的积分路綫，就是 $\mathrm{Re}\,p=\pm\sigma\,(0<\sigma<1)$ 所表示的平行于虛軸的直綫。Γ_+ 在 C_+ 的左方卽 $\mathrm{Re}\,p<\sigma$ 的部分正則，Γ_- 在 $\mathrm{Re}\,p>-\sigma$ 的部分正則。

因为 $\rho_1(p)$ 在 $\mathrm{Re}\,p>0$ 的部分正則，若把(40.12)改写为

$$\left[\frac{p^2}{(p+1)\Gamma_-(p)}\right]\rho_1(p)=\left[\frac{p-1}{\Gamma_+(p)}\right]\int_{-1}^{0}\frac{\mu f(0,\mu)}{1+p\mu}\,d\mu,$$

則左边在 $\mathrm{Re}\,p>0$ 的部分正則，右边在 $\mathrm{Re}\,p<\sigma$ 的部分正則。于是上式所定义的解析函数在 p 为有限的地方正則，而且当 p 增大时 $\Gamma_+(p)$ 成为常数，因此当 p 增大时上式的左右两端都趋近于常数。包括无限远点在内到处正則的解析函数只有是常数，所以得到

$$\rho_1(p)=\frac{C}{p^2}(p+1)\Gamma_-(p). \tag{40.15}$$

这样就能消去原式中所含的未知函数 $f(0,\mu)$. 因为 (40.15) 的常数 C 是比例常数，如果整个的中子束知道了，它也就决定了。再返回(40.12)，当 $p\to 0$ 时右端等于 J，而 $1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\sim\frac{1}{3}p^2$ 所以

$$\rho_1(p)\sim -3J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{\delta}{p}+\cdots\right)\quad(p\to 0). \tag{40.16}$$

另一方面，当 $p\to 0$ 时，不难求出 Γ_-. 为了求 $\Gamma_-(0)$，如图 40.2 所示，把 C_- 取为虚軸，并且圍繞原点作一微小半圓的变形。当 $p=0$ 时，因为被积函数是 t 的奇函数，故在虚軸上的积分消失，仅剩下半圓上的积分。这能用殘数計算，

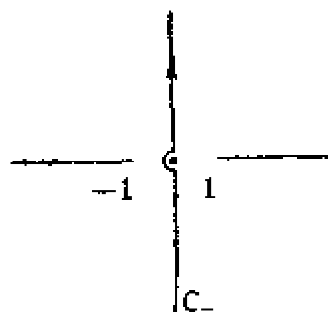


图 40.2

$$\log\Gamma_-(0)=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]$$
$$=+\frac{1}{2}\log 3.$$

从而 $\Gamma_-(0)=\sqrt{3}$，因之从 (40.15) 可知 $\rho_1(p)\to-\frac{C\sqrt{3}}{p^2}+\cdots$. 将它与(40.16)比較，即得 $C=-\sqrt{3}J$. 于是

$$\rho_1(p)=-\sqrt{3}J\frac{p+1}{p^2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t-p}\right\}. \tag{40.17}$$

为了求(40.16)的展开式的系数 δ 等，把上式按照 p 的乘冪展开。如設 $\log\Gamma_-(p)=\log\sqrt{3}+ap+\cdots$，則有

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\log\left[3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{\tan^{-1}t}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^2}.$$

在这里改变成实値积分时，为了使 log 中的部分成为 0，曾加上了等于 0 的积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\frac{dt}{t^2}$ 之后才变形的。另外如展开 $\rho_1(p)$ 后，則成为

$$\rho_1(p)\sim-\sqrt{3}\,J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\exp\left(\log\sqrt{3}+ap+\cdots\right)$$

$$=-3J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1+a}{p}+\cdots\right),$$

因此(40.16)的系数 δ 能作为 $1+a$ 而求出。a 由分部积分可以算出，从其結果可知

$$\delta=0.710446\cdots. \tag{40.18}$$

求出 $\rho_1(p)$ 之后，即能从 (40.10) 求出被射出的中子的分布。如从 $\rho_1(p)$ 逆求 $\rho(\xi)$，則得

$$\rho(\xi)\sim-3J(\xi+\delta+\cdots). \tag{40.19}$$

这从 $\int_0^\infty\xi^n e^{-p\xi}d\xi=n!/p^{n+1}$ 即可明了。使此結果与 (40.5) 对比，即知該式的 ρ_0 必然是 $-3J\delta$. 从而 $f(\xi,\mu)$ 的漸近式是

$$f(\xi,\mu)\sim-\frac{3}{2}J(\xi+\delta)+\frac{3}{2}J\mu. \tag{40.20}$$

扩散微分方程在这种情况可以簡单地解出。在稳定的情形，因为 $\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}=0$，故 ρ 成为 ξ 的一次式。从而得到形如(40.19)的解，为此在表面上設

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi}=\frac{1}{\delta}\rho\quad(\xi=0)$$

即可。总之在 $\xi=-\delta$ 或 $x=-0.7104\cdots\lambda$ 的地方使其为 0 即可。在前节曾見过 $x=-\frac{2}{3}\lambda$，显見这是相当良好的近似。从而，边界即使不是完全的平面，只要曲率不大，可以設想边界外为 0.7104λ 处存有虛构的边界面，再假設在該处的中子密度为 0，就能解出。

若令 ξ 为 0, (40.20) 就成为 $f(0,\mu)\sim\left(-\frac{3}{2}J\right)(\delta-\mu)$，可以証明，这就是角分布的近似式。

問題 2 假設中子入射于具有平面边界的散射体。如果本节所讲的 Milne 方程的解为已知，这个問題的解就能求出。証明此問題并求其解。

用扩散微分方程解决入射中子問題时，需要把因碰撞而散射的中子看做中子源。也就是說，如果中子以 $f(0,\mu)d\mu\,d\varphi$ 的密度入射，則未經散射而达到深度为 x 处的中子的个数为 $f(0,\mu,\varphi)e^{-\frac{x}{\lambda\mu}}d\mu\,d\varphi$，因此向 μ', φ' 方向散射的中子的个数为

$$\frac{x\,d\mu'\,d\varphi'}{4\pi\lambda}\int f(0,\mu,\varphi)e^{-\frac{x}{\lambda\mu}}d\mu\,d\varphi.$$

取上式为中子源的密度，問題就可以解决了。

§41 扩散方程的例题

1) 中子垂直入射于以无限平面为边界的半无限散射体的問題 首先考虑稳定情况。假設入射中子流的强度为 N，卽在单位面积上每秒有 N 个中子入射，則在深度为 x 处在单位时間内产生的中子个数为 $(N/\lambda)e^{-x/\lambda}dx$，从而

$$D\frac{d^2\rho}{dx^2}-\alpha^2\rho=-\frac{N}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}. \qquad (41.1)$$

边界条件：在 $x=\infty$ 处 $\rho=0$；在假想的边界面 $x=0$ 处 $\rho=0$. 方程的解为

$$\rho(x)=\frac{N\lambda}{D-\lambda^2\alpha^2}\left[e^{-\frac{x\alpha}{\sqrt{D}}}-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]. \qquad (41.2)$$

当 $D=\lambda^2\alpha^2$ 时，方程的解稍有不同。把求解問題留作讀者的练习。

中子流是

$$J(x)=\frac{N\lambda D}{D-\alpha^2\lambda^2}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{D}}e^{-\frac{\alpha x}{\sqrt{D}}}-\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\right].$$

在表面上則为

$$J(0)=\frac{-N\sqrt{D}}{\sqrt{D}+\alpha\lambda}.$$

如果沒有吸收，$J(0)$就等于$-N$. 这就相当于完全反射的情况。

如果使用边界条件$\rho=\delta\frac{\partial\rho}{\partial x}(\delta=0.71\lambda)$，就要以$\rho'=\rho-\delta\frac{\partial\rho}{\partial x}$代替$\rho$. 于是就能用$q-\delta\frac{\partial q}{\partial x}=\left(1+\frac{\delta}{\lambda}\right)\frac{N}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}=1.71\frac{N}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$代替$q$. 从而$\rho'$是以前所求出的$\rho$的1.71倍。利用$\rho'$解微分方程即知$\rho$为

$$\rho(x)=\frac{1.71\lambda N}{D-\lambda^2\alpha^2}\left[\frac{\sqrt{D}e^{-\frac{\alpha x}{\sqrt{D}}}}{\sqrt{D}+0.71\lambda\alpha}-\frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{1.71}\right].\qquad(41.3)$$

无吸收时就和完全反射的情况相同。

如果ρ是随着时間变化的，用 Green 函数来处理比較方便。若边界条件为：在$x=0$处$\rho=0$，由鏡象原理可知 Green 函数为

$$G(x,\ t;\ x',\ 0)=\frac{e^{-\alpha^2 t}}{2\sqrt{\pi Dt}}\left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4Dt}}\right]u(t).\quad(41.4)$$

对于中子向平面垂直入射的場合，假設于时刻$t=0$存有$N\delta(t)$个的中子流，中子源就成为$(N/\lambda)e^{-x/\lambda}\delta(t)$. 实际这时可設中子的速度为$\delta(t-vx)$，与扩散的时間对比，如果中子的速度較大就能設想同时发生散射。

利用G，立即求得其解：

$$\rho(x,\ t)=\frac{N}{\lambda}\int e^{-\frac{x}{\lambda}}G(x,\ t;\ x',\ 0)dx'$$

$$=\frac{N}{2\lambda}u(t)e^{-\alpha^2 t+\frac{Dt}{\lambda^2}}\left[e^{-\frac{x}{\lambda}}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Dt}}{\lambda}-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right.$$

$$\left.-e^{\frac{x}{\lambda}}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Dt}}{\lambda}+\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right].\qquad(41.5)$$

这里面的

$$\operatorname{erf}y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty e^{-y^2}dy$$

是誤差积分。

2. **在直交六面体的一个面上存在中子源的問題** 取直交軸 x, y, z，設六面体的六个面分别是 $x=\pm\frac{a}{2}$，$y=\pm\frac{b}{2}$，$z=0$ 及 $z=c$，并設中子源存在于 $z=0$ 的面上。試求稳定場合的中子分布。此时扩散式为

$$\nabla^2\rho-\beta^2\rho=0 \quad \left(\beta^2=\frac{\alpha^2}{D}\right). \tag{41.6}$$

用直交坐标分离变数，就容易知道存在着形如

$$\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix} k_x x \begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix} k_y y \begin{pmatrix}\sinh\\ \cosh\end{pmatrix} k_z z$$

的解。其中 k_x, k_y, k_z 必須适合下面的关系式

$$k_x^2+k_y^2+\beta^2=k_z^2.$$

中子源的分布关于 $\pm x$, $\pm y$ 成对称，为了适合在 $z=0$ 以外的面上 ρ 为 0 这一边界条件，令

$$k_x=\frac{m\pi}{a}, \quad m=1, 3, 5, \cdots,$$

$$k_y=\frac{n\pi}{b}, \quad n=1, 3, 5, \cdots,$$

取 $\cos k_x x\cos k_y y$ 卽可。k_z 由

$$k_{m,n}=\left[\beta^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

决定，并設之为 $\sinh k_z z$. 这么

$$\rho=\sum_{m,n}C_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sinh k_{m,n}(c-z) \tag{41.7}$$

就是一般解。

从 $z=0$ 平面流出的中子流是

$$J(x, y)=-D\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_{z=0}$$

$$=\sum_{mn}DC_{mn}k_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cosh k_{mn}c.$$

由此式可知，若中子源的强度 $J(x, y)$ 为已知，就能决定 C_{mn}。若把 $J(x, y)$ 分解成(41.7)的形状，并設其系数为 J_{mn}，就有

$$J_{mn}=\frac{4}{ab}\iint J(x, y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy.$$

在原点如有强度为1的中子源，则得 $J_{mn}=\frac{4}{ab}$。从而

$$\rho(x, y, z)=\sum_{m, n}\frac{J_{mn}}{Dk_{mn}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh k_{mn}(c-z)}{\cosh k_{mn}c}. \tag{41.8}$$

当 $k_{mn}c$ 大于1时，含有 z 的项接近于 $e^{-k_{mn}z}$。因此当 z 渐大时它就急剧地减小，只有 $m=n=1$ 的项起主要作用。在实际問題中常用較长的棒沿着 z 测定中子的强度以求 $\beta^2=\alpha^2/D$。

現在略述中子源的强度(即中子源放出中子的个数)与 J 的关系。在上述例子中曾假設中子源在 $z=0$ 的面上，散射在 $z>0$ 的部分。如果在 $z<0$ 部分沒有任何物体存在，从中子源入射于散射体的中子，有一部被散射而折回，因此 J 要减小一些。这时，如在1) 中所述，必須把进入散射体的内部而受到散射的中子看做中子源。如果在 $z<0$ 的部分也有同样的散射体，从这边也有一部中子散射回来，这样就恰好补偿失散的部分。关于 J 的值只取从中子源向 $z>0$ 方面放出的中子数就可以了。使用扩散理論时必須注意这样的事項。

3) **年龄理論**(Age theory)　中子在散射体内不但被散射，而且因为和原子碰撞而减速。如果中子和鈾碰撞就能引起鈾的分裂；中子也能被种种的原子吸收。随着中子能量的大小，这些过程的发生方式就有显著的不同。中子在减速剂中的扩散，能用近似于扩散微分方程的数式来处理。現在把这种方法叙述如下。

令被碰撞的原子的质量为中子质量的 A 倍，且令在彈性碰撞前中子和原子的速度分别为 v 和 0。当减速剂的原子的质量大于

中子的质量($A\gg1$)时，碰撞后的中子大致按球对称散射；由动能和动量守恒定律很容易求出速度 v' 和散射角 θ 之間有如下的关系：

$$v'\sim v\left[1-\frac{1}{A}(1-\cos\theta)\right]. \tag{41.9}$$

作为平均值可以考虑 $v'\sim v\left[1-\frac{1}{A}\right]$. 从而由于1回碰撞

$$\frac{\delta v}{v}\sim-\frac{1}{A},$$

n 回碰撞后的速度満足下面的关系

$$\log\frac{v_n}{v}=-\frac{n}{A}.$$

假設中子的初速度为 v_0，并且导入下面的量 u：

$$\log\frac{v_0}{v}=u, \tag{41.10}$$

Au 就表示平均碰撞回数。速度 v 的中子在 dt 的时間内碰撞 vdt/λ 回，因此

$$du=\frac{1}{A}\frac{v}{\lambda}dt, \tag{41.11}$$

在一般的情况下需要把 λ 看做速度的函数。

假設从中子源发出經过 t 时間后到达 $\boldsymbol{r}$ 点的中子数为 $\rho(\boldsymbol{r},t)$. 現在只考察关于时間大体为稳定的情况，由(41.11)知道，这里的 t 表示速度。由扩散而产生的密度增加率为 $D\nabla^2\rho$. 这里 $D=\frac{\lambda v}{3}$，是速度的函数，于是在形式上能写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\nabla^2\rho. \tag{41.12}$$

然而 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 并不是随同时間而变化的，实际表示因碰撞而具有速度 v 的中子数的增加，因此依据(41.11)則要用 u 来代换。于是，若

把具有u与$u+du$之間的值的中子数写为$\rho(\boldsymbol{r}, u)du$,则

$$\rho(\boldsymbol{r}, u)du=\rho(\boldsymbol{r}, t)dt,$$

因此,

$$\rho(\boldsymbol{r}, u)\frac{v}{A\lambda}=\rho(\boldsymbol{r}, t)\equiv\phi(\boldsymbol{r}, u). \tag{41.13}$$

依据(41.12)就得到

$$D\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}, u)=\frac{v}{A\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\phi(\boldsymbol{r}, u). \tag{41.14}$$

进一步,假設

$$\tau(u)=\int_0^u\frac{AD\lambda}{v}du=\int_0^t Ddt, \tag{41.15}$$

则有

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\tau}, \tag{41.16}$$

这是标准扩散方程,τ称为 Fermi 年龄。需要注意:它在形式上虽然与标准方程相同,但解釋不同。例如,普通的扩散是随时間的延續从中子源逐渐向远处扩伸,可是在这种場合,能量大的中子集中于源的近处,能量小的中子则扩散到远方。

如果平面状的中子源存在于无限广大的介质中,在与平面的距离为x的点的中子密度当为

$$\rho(x, \tau)=\frac{e^{-x^2/4\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}}.$$

利用这个关系,考察在无限介质内存在有点状源的情况。設与此点的距离为r处的密度是$\rho_1(r, \tau)$,上面的$\rho(x, \tau)$乃是面上各点产生的密度的总和,所以应該是

$$\rho(x, \tau)=\int_0^\infty\rho_1(r, \tau)2\pi y\,dy.$$

这里的y是到面上的原点的距离。显見$r^2=x^2+y^2$,使用$rdr=ydy$的关系就可以改写为

$$\rho(x,\ \tau) = \int_x^{\infty} \rho_1(r,\ \tau) 2\pi r\, dr.$$

把 $\rho(x,\ \tau)$ 对 x 微分，然后再把 x 写成 r，就能得到

$$\rho_1(r,\ \tau) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\rho(r,\ \tau) = \frac{e^{-r^2/\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \qquad (41.17)$$

这就是点源的 Green 函数。

若求具有相同年龄 τ 的中子的 r^2 的平均 $\overline{r^2}$，可得

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^{\infty} \rho_1 r^4\, dr}{\int_0^{\infty} \rho_1 r^2\, dr} = 6\tau, \qquad (41.18)$$

这説明能量越小的中子（τ 越大），从平均上看，越在远方。

第6章 波 动

§42 波动方程

小振幅的振动在空間傳播的現象，在一般的情况下都能用波动方程来表达。在空气中傳播的音波，如果振幅很小而且空气移动的速度也小于音速，就满足波动方程。电磁波也是如此。此外，量子力学的波函数也名符其实地能用波动方程来表达；不过它的波动方程和音波的波动方程在形式上稍有不同。以下試就若干情况来求波动方程的具体的形状并总括地考察边界条件的意义。

1) 弦振动 設有被拉紧的弦，其張力为 T. 取弦的静止位置为 z 軸，在它的垂直方向取 x, y 軸。假設弦上的一点在静止时位于$(0, 0, z)$，运动时在 x 方向的位移为 $\phi(z)$，在 y 方向的位移为 $\psi(z)$. 因为位移很小可以不考虑弦的伸长，所以把張力 T 也看做不变的。由于有張力作用在弦的两端，弦总要被拉回原来的位置。設作用于 z 和 $z+dz$ 之間的張力为 F_x, F_y. 弦的方向余弦可以近似地用 $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, 1 給出。所以

$$F_x = T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z+dz} - T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_z = T\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}dz,$$

同样

$$F_y = T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}dz.$$

若令弦的单位长度的质量为 ρ，則作用力等于 $\rho\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, $\rho\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$，因此

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

若把(ϕ, ψ)看做x, y面内的矢量并以$\boldsymbol{A}$表示之，则

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}. \tag{42.1}$$

这里$c^2=T/\rho$，由張力和密度决定。在§1已經指出，它表示波的速度。如果弦的密度是不均匀的，波的速度也是变化的。ϕ和ψ适合同一形式的方程，表示以同样的速度傳播的波。如果$\phi\neq0$而$\psi=0$，表示在x方向偏振的波。如果$\phi=0$而$\psi\neq0$，則表示在y方向偏振的波。而且

$$\phi=A\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right),$$

$$\psi=A\sin\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)$$

表示位移的大小到处为A的右旋前进的圓偏振波。由此可知，在弦上傳播的波可以看做光的模型。

为了簡单，只考慮直綫偏振波并求其动能和势能。很明显，动能K为

$$K=\frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2dz, \tag{42.2}$$

位能是由張力T的作用使弦变形而产生的，所以它等于T乘以弦的伸长。原长为dz的部分，变形后为$dz\sqrt{1+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}$，所以它的伸长为$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2dz$。于是势能$U$为

$$U=\frac{T}{2}\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2dz. \tag{42.3}$$

总能量E等于$K+U$。

总能量在$z=a$到$z=b$之間的变化为

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}dz,$$

进行微分之后再利用运动方程就得到

$$\frac{dE}{dt}=\left(T\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=b}-\left(T\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=a},\qquad(42.4)$$

由此可知，$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 表示沿着 z 正向流动的能流。因为 $-T\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 是 z 的負的部分作用于正的部分的横力，而 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 是速度，所以上面的結論是当然的。

如果从波与电振动在形式上的类似来着眼，对于熟悉电学的讀者是很便利的。因为 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 表示速度，所以使它和电流 I 相对应。因为 $-T\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 表示力，所以使它和电压 V 相对应。于是沿着 z 軸流动的电力为 VI. 而动能 K 可以写为 $\int\frac{1}{2}\rho I^2\,dz$，回路中的磁能为 $\frac{1}{2}LI^2$，这里 L 表示电感。如果用 C 表示电容則电能为 $\frac{1}{2}CV^2$. 于是和势能 $U=\int\frac{V^2}{2T}dz$ 相比較就知道 $1/T$ 和电容 C 相对应。

在电磁学中称

$$Z=\frac{V}{I}\qquad(42.5)$$

为端点 z 的阻抗，$\sqrt{L/C}$ 为特性阻抗，而波速为 $1/\sqrt{LC}$.

就弦振动来説，波速 c 为 $\sqrt{T/\rho}$，若令 $L=\rho$, $C=1/T$，则 c 确实等于 $1/\sqrt{LC}$。如果用

$$\phi=Ae^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c}z}$$

表示在 $+z$ 方向进行的波，則

$$\left.\begin{aligned}V&=-T\frac{\partial\phi}{\partial z}=-iT\frac{\omega}{c}\phi,\\I&=\frac{\partial\phi}{\partial t}=-i\omega\phi,\end{aligned}\right\}\qquad(42.6)$$

因此

$$Z=\frac{V}{J}=\frac{T}{c}=\sqrt{T\rho}.$$

由上述的 $L=\rho$, $C=1/T$ 可以知道 Z 等于用 $\sqrt{L/C}$ 定义的特性阻抗。

如果弦的两端是固定的，则边界条件为 $\phi=0$(第一种)；如果弦的两端可以自由移动，则边界条件为 $\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$(第二种)。这是在水平方向張起的弦的两端可以上下自由移动的情况。如果存在着和速度成正比的摩擦力 $R\frac{\partial\phi}{\partial t}$，同时还存在着和位移成正比的复原弹力，则

$$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}=R\frac{\partial\phi}{\partial t}+\alpha\phi.$$

令 ω 为复数，令 $\phi\propto e^{-i\omega t}$，则端点的阻抗为

$$Z=\frac{-T\frac{\partial\phi}{\partial z}}{\frac{\partial\phi}{\partial t}}=R+\frac{\alpha}{\omega}i,$$

这就是边界条件。此外，如果使弦的端点运动，ϕ 就是給定的时間的函数；如果作用力已經确定，$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 就成为給定的函数。

如果弦的周圍存在着空气，因該处的空气发生振动，弦的能量被夺取而振动减弱。又因为弦与空气摩擦也損失能量，若摩擦力和速度成正比，方程就成为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\sigma\frac{\partial\phi}{\partial t}\tag{42.7}$$

的形式。这叫电信方程，沿着有电漏的电纜傳播的电波也滿足这样的方程。

如果弦被彈性体包圍着，则有和位移成正比的作用力要使弦回到原处，假設这个作用力为 $-\mu^2\phi$，则

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\mu^2\phi. \tag{42.8}$$

这和基本粒子論中的 Klein-Gordon 方程有同一的形式，但 Klein-Gordon 方程所描述的是标量介子的运动。

2) **流体中的音波**　首先回想一下关于流体运动方程的必要事項。假設流体在一点 $\boldsymbol{r}$ 的速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$，密度为 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$. 經过 dt 時間之后在这一点的流体移动到 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\,dt$，速度变化为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\,dt,\ t+dt)-v(\boldsymbol{r},\ t)=\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$. $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$ 是一个常用的算符。根据以上的事实可以把力学的定律写为

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}.$$

$\boldsymbol{F}$ 是作用于单位体积的力，也包括因流体的变形而产生的应力。例如，假若压力为 p，则 $\boldsymbol{F}=-\nabla p$. 如果流体有粘性，就需要加上和速度有关的力。为了簡单起見只考虑压力，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{42.9}$$

又因为 $\rho\boldsymbol{v}$ 是物质流，而且流出的量必等于密度的減小，所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}). \tag{42.10}$$

这就是連續方程。

流体的压力和密度之間虽然存在着某种关系，但是一般地說，密度并不仅是压力的函数。就簡单的理想气体来說，如果不給出温度，只有压力并不能决定密度。压力改变而密度一定的假設，对液体来說是近似地成立，但是这样就产生不了音波。如果运动对于时間的变化很快，在空間方面也沒有温度的急剧变化以至于可以忽視热傳导，这时就可以把流体的变化看做絕热的。在这种情况下就气体来說大致可以认为

$$p/\rho^\gamma=\text{常数}。 \tag{42.11}$$

这里的 γ 是定压比热和定容比热之比，对空气 $\gamma=1.4$. 这时

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{d\rho}&=\gamma\frac{p}{\rho}=c^2,\\ \int\frac{dp}{\rho}&=\frac{1}{\gamma-1}c^2+\text{常数}。\end{aligned}\right\}\tag{42.12}$$

对于液体 $dp/d\rho$ 为压缩系数的倒数。

在运动方程中 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 是速度的二乘方，因此对于速度很小的运动，如音波的傳播，就可以省略这一项，而令

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\sim-\nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\sim-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla\cdot\int\frac{dp}{\rho}.$$

从而可以认为 $\boldsymbol{v}$ 滿足 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$, 这就是沒有渦流的情况。假設 c^2 为常数，利用 $\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ 从上式消去 ρ 就得到

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})c^2=c^2\nabla^2\boldsymbol{v}.\tag{42.13}$$

因为沒有渦流，所以 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$. ϕ 叫速度势。和(42.13)一样 ϕ 滿足

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\nabla^2\phi,\tag{42.14}$$

这就是波动方程，(42.14)中的 c 是音速。

和弦振动一样，也有种种的边界条件。在靜止的剛硬的壁上，流体的速度必需和壁平行，若令壁的法綫为 n, 则

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0.$$

这是第二种边界条件。根据前述的方程可以知道，由音波引起的压力变化为 $\delta p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$. 如果边界不是固定的，而是随着压力变化的，则称压力与速度之比

$$Z=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

为壁的法綫方向阻抗。对于諧振动，因为 $\phi\propto e^{-i\omega t}$，可以把压力的增加写为 $i\omega\rho\phi$；因此 Z 与 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 之比成正比。

3) **量子力学的波动方程** 把 Schrödinger 方程用直交坐标写出则为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\psi. \tag{42.15}$$

这里的 $\boldsymbol{p}$ 是动量，可以用

$$\boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla \tag{42.16}$$

表示。$\hbar$ 等于 Planck 常数除以 2π. H 是 Hamilton 算符。对于多数的粒子如果取 H 为全体的 Hamilton 算符，则有同一形式的方程成立。

对受外势 $V(x)$ 的作用而运动的粒子，如果假設 m 为粒子的质量，则

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x),$$

于是 Schrödinger 方程成为

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right\}\psi(x,t). \tag{42.17}$$

上式虽被称为波动方程，但在形式上却和扩散方程相似。波动方程包含算符 $\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，而 Schrödinger 方程只包含时間的一阶微分，所以它是抛物綫型微分方程。对于扩散，(42.17)的左端不含 i 而是实数方程。由于粒子随着时間的延續而扩散，一般地說不能够追究它在过去的状态。例如在初时刻 $t(t=0)$ 聚集在一点的粒子，在以后的时刻 $t(t>0)$ 已經扩散了。反过来說，已知粒子在时刻 t 聚集在一点，若問在过去的时刻 0 粒子是怎样分布的，就不能回答了。Schrödinger 方程不是这样，例如自由粒子 $(V=0)$，假設在时刻 $t(t=0)$ 在原点 $x=0$ 处有粒子源，在 $t>0$ 的解可以用 Green 函数 $G(x,t)$ 表示。这里的 $G(x,t)$ 是把扩散系

数取为虚数而得的結果。如果取 (42.16) 的复数共軛式就可以知道：G 的共軛复数 G^* 能适合把 (42.16) 中的 i 改为 $-i$ 的方程；若把其中的 t 改为 $-t$，就和 (42.16) 完全相同。由此可知：$G^*(x, -t)$ 是追溯过去的状况的解，表示在初时刻 t 收斂于原点的波。

在量子力学中，要求 ψ 和 $\nabla\psi$ 到处連續。即使势不連續，ψ 和 $\nabla\psi$ 也必需連續。$\psi^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ 叫做粒子在 $\boldsymbol{r}$ 点的概率。由 (42.17) 及其复数共軛方程可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \psi^*\psi\, d\tau = -\frac{\hbar}{2mi}\int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\psi^*}{\partial n}\psi\right)da. \quad (42.18)$$

右端的积分是在积分域的表面上施行的；n 表示外法綫。因为上式与連續方程的形式相同，所以称

$$\boldsymbol{J} = -\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^*\cdot\psi) \quad (42.19)$$

为概率流。因为 ψ 和 $\nabla\psi$ 都連續，所以 $\boldsymbol{J}$ 也連續，这意味着粒子的概率也是守恒的。若取全空間为积分域而且 ψ 和 $\nabla\psi$ 在远处都是充分地小，则

$$\int\psi^*\psi\, d\tau \quad (42.20)$$

不隨着时間变化，所以能归一化，这就和总概率为 1 相对应。

在經典力学中，粒子不能到达位能大于总能量的場所，但是因波动方程的解是連續的，所以粒子能到达到經典力学认为不能达到的范圍。因此，必需把 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 在边界上連續的要求推广到无限远处。如果边界是不能通过的理想剛壁，在这样的壁上 $\psi=0$，这就是边界条件。

由于 Schrödinger 方程只含有时間的一阶导数，所以若在某时刻 $t=0$ 給出了 $\psi(\boldsymbol{r})$，并且还决定了空間的边界条件就能求得它

的解。因为 ψ 是复数，所以为了給出 ψ 的値必需給出它的实部和虚部。

4) **Helmholtz 方程** 如果波动方程(42.14)中的 ϕ 作周期变化而且与 $e^{-i\omega t}$ 成正比，则方程成为

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=0. \tag{42.21}$$

这里 $k^2=\omega^2/c^2$. 在 Schrödinger 方程中，即使 ψ 是周期函数，方程仍为

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}[\hbar\omega-V(\boldsymbol{r})]\psi=0. \tag{42.22}$$

在 Schrödinger 方程中如果不规定势的基准点，就不能决定能量 $\hbar\omega$ 的基准点，但是因为 V 和 $\hbar\omega$ 的差等于动能，所以动能与基准点无关。上式与(42.21)不同，$\hbar\omega-V$ 并不限于正值。当 $V=0$ 而 $\hbar\omega>0$ 时就和(42.21)是同形的。(42.21)叫做 Helmholtz 方程。在热傳导現象中，如果温度和时間的关系是 $e^{-\lambda t}$，它的方程也是这样的形式。Helmholtz 方程是自伴的，(42.22)也是自伴的，所以在第3章所叙述的有关 Green 函数的一切事項都照样适用。于是在稳定的情况下，不論是波动方程还是 Schrödinger 方程都可以用同样的方法来討論。

§43 波在圓柱面上的散射

首先考虑稳定波，令 $\psi\propto e^{-i\omega t}$. 或者利用 Helmholtz 方程而省略其間因子来进行討論。以下暂且把稳定波这个术語理解为对时間作諧振动的波。如果三維空間的波在 z 軸方向沒有变化，就相当于沿圓柱或无限长的带的軸的垂直方向前进的平面波，在这种情况下，就可以把三維空間的波当作二維的問題来处理。

1) **利用极坐标分离变数** 把 Helmholtz 方程用极坐标 r, θ 写出，则为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+k^2\psi=0.$$

由此可知，它具有 $J_m(kr)e^{\pm im\theta}$，$N_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 的形式的解。这里 m 为 0 或正整数。

而平面波 $e^{ikr\cos\theta}$ 也是同一方程的解，并且在 $r=0$ 处有界，因此可以作形如

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos m\theta\, J_m(kr)$$

的展开。为了决定系数 C_m，把上式乘以 $\cos m\theta$ 再积分，则得

$$C_mJ_m(kr)=\varepsilon_m\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta,$$

这里 $\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_m=2$ $(m>0)$. 将上式和 Bessel 函数的积分表示

$$J_m(z)=\frac{1}{\pi i^m}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta$$

相比较，就知道 $C_m=\varepsilon_m i^m$. 于是

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\cos m\theta\, J_m(kr). \tag{43.1}$$

对于外向前进的球面波可以使用

$$H^{(1)}(kr)=J_m(kr)+iN_m(kr)=\frac{2}{\pi i^{m+1}}\int_0^{i\infty}e^{ikr\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta. \tag{43.2}$$

当 z 大于 m 时 $J_m(z)$ 和 $H_m^{(1)}(z)$ 的渐近式分别为

$$\left.\begin{aligned}J_m(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right),\\ H_m^{(1)}(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{43.3}$$

由此渐近式即可明了 $H^{(1)}$ 表示外向的波。

当 z 微小时，则有

$$\left.\begin{aligned} J_m(z) &\sim \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m, \\ N_0(z) &\sim \frac{2}{\pi}[\log z - 0.1159], \\ N_m(z) &\sim -\frac{1}{\pi(m-1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^m, \quad m>0. \end{aligned}\right\} \tag{43.4}$$

2) **波在圓柱面上的散射** 考察和圓柱垂直的前进平面波在圓柱上发生的散射现象。假設圓柱的半徑为 a，平面波的波数为 k（波长为 $2\pi/k$），取其前进方向为 x 軸，并取以圓柱的中心为原点的极坐标 r, θ. 假設由 $-x$ 的方向所射入的平面波为

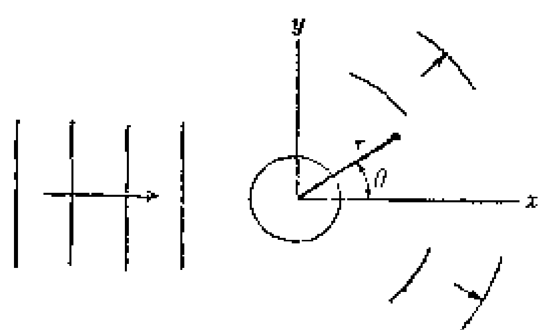


图 43.1

$$\psi_0 = e^{ikx} = e^{ikr\cos\theta}. \tag{43.5}$$

被球面散射的波为

$$\psi_s = \sum_m C_m \cos m\theta \cdot H_m^{(1)}(kr). \tag{43.6}$$

把两者迭加起来，就得到全体的波 ψ.

为了簡单，設球面的边界条件为 $\psi=0$. 这相当于量子力学中的剛体球。借用展开式(43.1)，得

$$\sum_m \cos m\theta\{\varepsilon_m i^m J_m(ka) + C_m H_m^{(1)}(ka)\} = 0.$$

由此可知

$$C_m = -\frac{\varepsilon_m i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}.$$

今令

$$H_m^{(1)}(ka) = -iH_m e^{-i\delta_m}, \tag{43.7}$$

由于 $H_m^{(1)}$ 的实部为 J_m，則得 $J_m = -H_m \sin\delta_m$. 用此卽得

$$C_m = -\varepsilon_m i^{m-1} e^{i\delta_m} \sin\delta_m. \tag{43.8}$$

在充分远处，使用 $H^{(1)}(kr)$ 的漸近式，得到

$$\psi_s \to +e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{ikr}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cdot e^{i\delta_m}\sin\delta_m\cos m\theta \tag{43.9}$$

散射波的和的部分，給出散射波的角分布。

δ_m 叫做周相移动(phase shift)。如果观察 $\psi_0+\psi_s$ 的漸近式，可以知道与 $\cos m\theta$ 成比例的部分是

$$\varepsilon_m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\Big[i^m\cos\Big(kr-\frac{\pi}{2}\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\Big)$$

$$-i^{m-1}e^{+i\delta_m}\sin\delta_m\cdot e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}\Big]$$

$$=\varepsilon_m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,\frac{i^m}{2}\Big[e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$+e^{+2i\delta_m}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}\Big]$$

$$=\varepsilon_m\sqrt{\frac{1}{2\pi k}}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}\Big[(-1)^m i\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}+e^{+2i\delta_m}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}\Big].$$

由此可見，向原点收斂的波和由原点发出的波的振幅的大小是相等的，只要球不吸收波，这就是当然的結果，并不需要假定散射体是剛性的壁。使用 $\partial\phi/\partial n=0$ 的边界条件也是一样，也不需要假定散射体的形状是圓柱形。但是在圓柱的場合 m 不同的部分波彼此无关，因而 δ_m 仅由矢徑方向的常微分方程的解就能决定；如果散射体的形状是很复杂的，需要通过边界条件把各部分波联系起来，这样就需要解复杂的联立方程来决定 δ_m。

和散射体的大小 a 相比，如果波长很长，在平面波中与 $\cos m\theta$ 成比例的部分是 $J_m(kr)$；如果波长很长而 k 很小并且 $ka\ll 1$，則在散射体的附近 $J_m(kr)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{kr}{2}\right)^m$。从而，若 m 变大，波的振幅就急剧地变小，散射波的振幅 C_m 也随着变小。这就意味着 δ_m 很小。如果只保留 δ_0 而把其余 δ_m 都忽略，就成为球对称的散射。

因为已經取入射波的振幅为 1，如果取散射波的近似式为

$$\psi_s \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\theta), \tag{43.10}$$

而在 θ 方向在角 $d\theta$ 内散射出来的波的强度应当是 $|\psi_s|^2 r\, d\theta$，所以散射波的强度是

$$\sigma(\theta) d\theta = |f(\theta)|^2 d\theta, \tag{43.11}$$

結果与 r 无关。这里的 $f(\theta)$ 是

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{2i}{\pi k}} \sum_m \varepsilon_m e^{i\delta_m} \sin\delta_m \cos m\theta, \tag{43.12}$$

叫做散射振幅。$\sigma(\theta)$ 具有面积(在二維問題中实际是綫段的长度)的量綱，称为散射的微分截面积。假如把圓柱面适当地区分，可使碰撞于某一部分的波偏轉了 θ 角之后而在这个方向散射。在經典力学中正是这样，由粒子碰撞的位置决定散射角。这样，散射于 θ 和 $\theta+d\theta$ 之間的部分从入射方向来看的截面积的总和应当是 $\sigma(\theta)d\theta$.

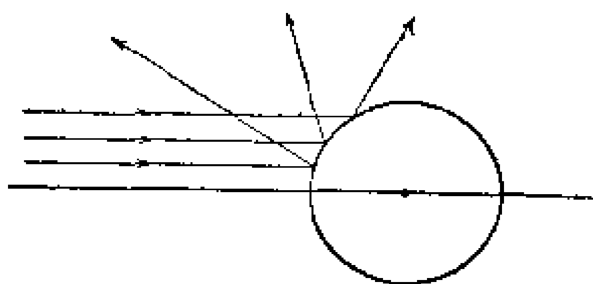


图 43.2　經典粒子的散射

散射波的总体的强度叫做总面积，記为 σ，把(43.11)积分就得到 σ：

$$\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta)\, d\theta = \frac{4}{k} \sum \varepsilon_m \sin^2 \delta_m. \tag{43.13}$$

$\theta=0$ 时的散射振幅，即入射波在前进方向的散射振幅 $f(0)$，叫做前方散射振幅。$f(0)$ 和 σ 之間存在着簡单的关系。直接計算就可以知道：

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f(0)}{\sqrt{i}}\right) = \sqrt{\frac{k}{8\pi}} \cdot \sigma. \tag{43.14}$$

这里 Im 表示虛数部分。这表示前方的波减少了被散射的这些。关于这一点以后还要提到。

問題 1 对于波长很长的波，$ka\to 0$，求証：

$$\sigma\to\frac{\pi^2}{k}\left(\log\frac{1}{ka}\right)^2.$$

如果在圆柱的表面上 $\partial\psi/\partial n=0$，求証：对于同一的极限，散射不是球对称的，散射截面积将减小为 $(ka)^3$ 倍的程度。

3）**短波长的波的散射** 若波长变短，k 就变大，这时由于 kr 很大，如果不是 $m\geqslant kr$，$J_m(kr)$就不能变小。由（43.3）知道，当 $m\ll ka$ 时

$$-\delta_m\sim ka-\frac{\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right).$$

当 $m\sim ka$ 时，(43.3)的关系虽然不能使用，但是可以証明，也能得到与此同程度的結果。求 σ 是把 $\sin^2\delta_m$ 迭加，而 $\sin^2\left(ka-\frac{\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2ka+\frac{\pi}{2}-m\pi\right)\right]$，其中余弦项是正負交替的，平均起来可以抵消，于是

$$\sigma\sim\frac{4}{k}\sum_{m=0}^{ka}\varepsilon_m\sim 4a \tag{43.15}$$

是圆柱的直徑 $2a$ 的 2 倍。

如果波长很短，波的扩散就减小而成为直进的，可視光能当作光綫来处理，正能說明这样的問題。这样，如果把人射波看作光綫，就只有投射于圆柱的光綫被散射，从而截面积似乎应当等于直徑，实际是直徑的 2 倍，这一結論将招致混乱。为了解明这个問題，把波长很短的波再稍加考察；而且需要把人射波和散射波的分离的意义作深入的考察。

散射波 ψ_s 满足 Helmholtz 方程，利用它的基本解

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=i\pi H_0^{(1)}(kR) \tag{43.16}$$

把 Green 公式写出，G 满足 $(\nabla^2+k^2)G=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$. 这里 R 是 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 之間的距离。这时

$$\psi_s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint\left[\psi_s(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_s(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds', \tag{43.17}$$

这里 n' 是从包含圆柱外部的点 $\boldsymbol{r}$ 的区域所看的內法綫，积分是在圆柱面上取的。作为表面，除了圆柱面之外还需要取一个能包括全体的較大的远处的曲面。ψ_s 和 G 都是外向的波，所以对积分不起作用。

若設入射波为 ψ_i，由于全体的波 $\psi=\psi_i+\psi_s$ 在柱面上为 0，所以在积分中可以令 $\psi_s=-\psi_i$，于是

$$\psi_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} + G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_s(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'. \tag{43.18}$$

当波长很短时，可以把圆柱面分为向阳和背阴两部分来考虑。向阳部分是入射波直接接触的部分。因为波长很短可以把入射波接触的面看作平面。在接触面完全是平面的場合，若令入射波为 $\psi_i=e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$，则反射波为 $\psi_s=-e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}$，

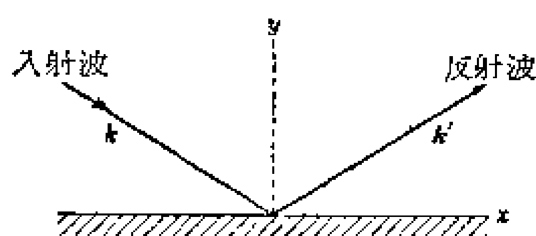


图 43.3

如图所示，$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 在法綫的两侧。若沿法綫方向取 y 軸，沿接触面取 x 軸，则 $k_x=k'_x$，$k_y=-k'_y$. 在接触面上，由于 $\psi_i=e^{ik_xx}$，$\psi_s=-e^{ik_xx}$，所以，$\psi_i=-\psi_s$ 成立。这时法綫的导数为

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y}=ik_ye^{ik_xy}=\frac{\partial\psi_s}{\partial y},$$

即 ψ_i 和 ψ_s 的法綫导数恰好相等。在背阴部分，可以不考虑因繞射而到达的波，所以 ψ_s 把 ψ_i 完全抵消，不但 $\psi_i=-\psi_s$，而且 $\frac{\partial\psi_i}{\partial n}$ 也等于 $-\frac{\partial\psi_s}{\partial n}$。从而

$$\psi_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{向阳}\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} + G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_i(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{背阴}\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_i(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'. \tag{43.19}$$

这样，在短波长的条件下，就把散射波用入射波直接表示出来了；剩下的只是积分的計算了。

从背阴部分射来的散射波叫做阴影散射(shadow scattering)。它是因为入射波不能到达背阴部分而产生的；也就是說，因为在背阴部分有恰好抵消入射波的散射波产生，所以产生阴影散射。因此不論向阳部分的散射是在什么条件下产生的，阴影散射只和散射体的全截面的面积有关。阴影散射的截面积应当等于全截面的面积。从而阴影散射和背阴部分的表面的形状无关。在下面就来討論这个問題。

阴影散射的积分是就背阴半圓（图 43.4 的 S 部分）把矢量 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}') = \psi_i(\boldsymbol{r})\nabla' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \nabla'\psi_i(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

的法綫分量积分而得的。然而 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$ 的散度为

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}') = \psi_i(\nabla'^2 + k^2)G - (\nabla'^2 + k^2)\psi_i\cdot G,$$

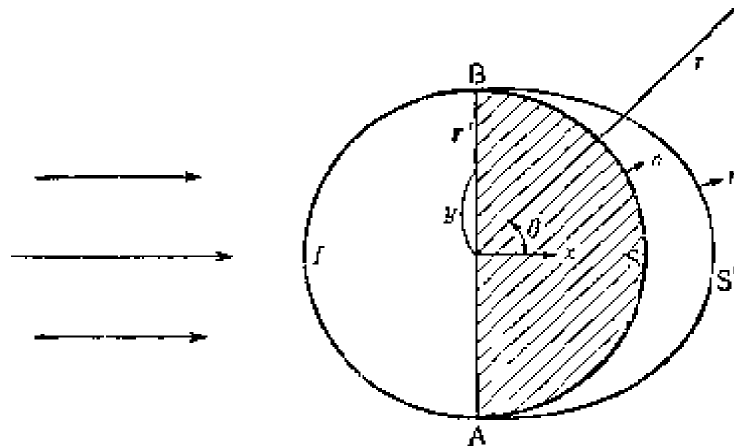


图 43.4

只要 $\boldsymbol{r}'$ 不在面 S 上散度就等于 0。从而，若在以 A，B 为共同边緣的二曲面 S, S' 所夹的部分把 $\nabla'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$ 积分，則得

$$0=\int\nabla'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,d\tau'=\int_{S'}\boldsymbol{v}_n\,dS'-\int_S\boldsymbol{v}\cdot dS'.$$

曲面的边緣 A，B 如果相同，积分値就相等。就是說，积分値只和在入射方向所看到的面积有关。

由此可知，阴影散射的积分可以取便于計算的面来計算；例如，包含圓柱的直徑 AB 的纵截面就可以取为积分面。如果把 $\boldsymbol{r}$ 移动到充分远的地方，且令 y 为从中心沿直徑到 $\boldsymbol{r}'$ 的距离，則

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}=r-y\sin\theta.$$

把 G 用漸近式表示，則为

$$G(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{r}')\sim\sqrt{\frac{2\pi}{kR}}\,e^{i\left(kR+\frac{\pi}{4}\right)}\sim\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\cdot e^{-iky\sin\theta},$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\sim-ik\cos\theta G.$$

又因为 ψ_i 是 e^{ikx}，所以在 AB 上 $\psi_i=1$, $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial n'}=\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}=ik$。从而阴影散射 S 是

$$\begin{aligned}S&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-a}^{a}(-ik\cos\theta G-G\cdot ik)\,dy\\&=\frac{ik}{4\pi}(1+\cos\theta)\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}e^{-iky\sin\theta}\,dy\\&=\frac{ik}{4\pi}(1+\cos\theta)\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\,2\,\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta}\\&=ia\cdot\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\frac{1+\cos\theta}{ka\sin\theta}\,\sin(ka\sin\theta)\frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}.\end{aligned}\tag{43.20}$$

当 ka 很大时，S 在 $\theta<\dfrac{1}{ka}$ 处取大的値，如果 θ 变大則 S 急剧减小。从而具有在角度 $(ka)^{-1}$ 范圍内的强銳的前方分布。在反

射的方向 $\theta=\pi$, $S=0$. 阴影散射的强度为

$$r|S(\theta)|^2=\frac{1}{2\pi k}\cot^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin^2(ka\sin\theta). \qquad (43.21)$$

总截面积虽然是

$$\sigma_S=\frac{1}{2\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\cot^2\frac{\theta}{2}\sin^2(ka\sin\theta)d\theta,$$

但如果 ka 很大,仅于 $\theta=0$ 的近处有效,所以令 $\sin\theta\sim\theta$, $\cot\frac{\theta}{2}\sim\frac{2}{\theta}$,且把积分域扩充为从 $-\infty$ 到 $+\infty$,这么就有

$$\sigma_S\sim\frac{2}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ka\theta}{\theta}\right)^2d\theta=a\cdot\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2d\theta=2a, \quad (43.22)$$

于是,阴影散射的总截面积正等于圆柱的截面积。

阴影散射的前方振幅 $f_S(0)$ 是

$$f_S(0)=ia\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\cdot2\cdot e^{\frac{\pi i}{4}},$$

而

$$\mathrm{Im}(f_S(\theta)/\sqrt{i})=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\cdot2a=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\sigma_S=\sqrt{\frac{k}{8\pi}}\cdot\sigma, \quad (43.23)$$

这正等于用总截面积表示的(43.14)的右端。这説明,在前方散射的振幅 $f(0)=f_I(0)+f_S(0)$ 中 $f_S(0)$ 和 $f(0)$ 起着相等的作用。从而可以設想 $\mathrm{Im}(f_I(0)/\sqrt{i})$ 为 0. 还须注意,这并不意味着来自向阳部分的散射在前方为 0.

其次計算向阳的散射 I. 这一部分实际仅能在圆柱面上計算。入射波为 $e^{ik_0r'}$, G 为 $\sqrt{\frac{2\pi}{kR}}e^{ikR+\frac{\pi}{4}i}$. 当 r 很大时则使用 $R\sim r-\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{r}$, $\nabla'R=\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{R}\sim-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. 在极坐标設 $\boldsymbol{r}'$ 为 r', θ'. θ' 在 $\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{3\pi}{2}$ 之间。这样就有

$$I=-\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-ik\cos(\theta'-\theta)+ik\cos\theta')$$

$$\times e^{ika\cos\theta'}e^{ikr+\frac{\pi}{4}i-ika\cos(\theta'-\theta)}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,a\,d\theta'.$$

这又可以改写成

$$I=-\frac{a}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\frac{\partial}{\partial a}\int e^{ik(\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta))a}\,d\theta'.$$

这个被积函数和 $\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta)$ 都在有极值的地方取确定数值，少許离开这里就立即成为振荡的，于是能求 ka 甚大时的渐近式。因为

$$\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta)=-2\sin\frac{2\theta'-\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$\theta'-\frac{\theta}{2}$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 或是 $\frac{3\pi}{2}$ 之处，上式有确定值。若在 0 与 π 之間取 θ，則 $\theta'-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$ 正是該处，如設 $\theta'-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+x$，則有

$$\sin\frac{2\theta'-\theta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots.$$

从而积分就成为

$$\int e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)}dx,$$

当 ka 很大时，x 稍微增大一点就迅速振动，从而积分消失，于是需要把积分范圍扩張为自 $-\infty$ 到 $+\infty$。因而可設积分为

$$e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ika\sin\frac{\theta}{2}\cdot x^2}dx.$$

这个积分能簡单地算出，結果是

$$e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{ka\sin\frac{\theta}{2}}}.$$

当求 I 时，就 a 微分此式，这时从指数函数的微分出現 k，与此对

比，且可略去因微分分母的 a 而得的部分。于是得到

$$I \sim -\sqrt{\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{2}}\ e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr}, \tag{43.24}$$

由此可知角分布是

$$r|I(\theta)|^2 \sim \frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{43.25}$$

在前方为 0，在后方为最大，在前方并不是特别尖銳的。总截面积是

$$\sigma_I = \int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a, \tag{43.26}$$

于是 $\sigma_S = \sigma_I$.

全体的波 $\psi = \psi_I + \psi_S + \psi_0$ 的漸近式为

$$\psi \sim e^{ikr\cos\theta} + \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}}e^{ikr},$$

这里

$$f(\theta) = -\sqrt{\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{2}}\ e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}} + ia\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\ e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{1+\cos\theta}{ka\sin\theta}\sin(ka\sin\theta). \tag{43.27}$$

§ 44 波在球面上的散射

在前节曾經把波在圆柱面上的散射当作二維問題处理了，現在以完全相同的方法来处理波在球面上的散射。

1) **用极坐标分离变数** 假設散射体在原点，并且对它有平面波入射；取入射波的进行方向为 z 軸，并导入极坐标 r, θ, φ. 如果散射体的大小是有限的，在它外側的波适合 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0.$$

若用极坐标分离变数，则关于 φ 有形如 $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$ 的解；关于 θ 有形如 $P_n^m(\cos\theta)$ 的解；关于 r 有形如 $j_n(kr)$, $n_n(kr)$ 的解。这里的 m, n 是正整数或0；j 和 n 是球 Bessel 函数，其定义为

$$\left.\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z), \\ n_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,N_{n+\frac{1}{2}}(z). \end{aligned}\right\} \tag{44.1}$$

还有 $h_n^{(1)} = j_n + in_n$, $h_n^{(2)} = j_n - in_n$ 也是常用的函数。当 z 变得小和很大时函数的渐近式分别为

$$\left.\begin{aligned} j_n(z) &\to \frac{z^n}{1\cdot3\cdots(2n+1)} \to \frac{1}{z}\cos\left[z - \frac{n+1}{2}\pi\right], \\ n_n(z) &\to -\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{z^{n+1}} \to \frac{1}{z}\sin\left[z - \frac{n+1}{2}\pi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{44.2}$$

j 和 n 实际是初等函数。

用球面波把平面波展开则为

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\,j_n(kr). \tag{44.3}$$

把上式的两端乘 P_n 再积分，比较 r 在远处的渐近式，就可以証明上式是正确的。

2) **波在球面上的散射** 如果散射体是球对称的，ψ 所满足的方程可以利用极坐标来分离，所以能展开为

$$\psi = e^{ikr\cos\theta} + \sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)A_n h_n^{(1)}(kr) \tag{44.4}$$

的形式，其中的第二项（写为 ψ_s）表示向外的波。ψ 的渐近式为

$$\begin{aligned} \psi &\sim \sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\frac{1}{kr}\left[\cos\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)\right. \\ &\qquad \left. + A_n e^{i\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)}\right] \\ &= \sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\frac{1}{2kr}\left[e^{-i\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)}\right. \\ &\qquad \left. + (1+2A_n)e^{i\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)}\right], \end{aligned}$$

方括号里的部分表示收斂波和发散波之和。如果波不被散射体吸收，收斂波和发散波的振幅的大小应当相等，所以 $1+2A_n$ 的絕对值等于 1. 如果把它写为 $e^{+2i\delta_n}$ 則

$$A_n=\frac{e^{+2i\delta_n}-1}{2}=ie^{+i\delta_n}\sin\delta_n, \qquad (44.5)$$

其中 δ_n 表示周相移动。这时散射波 ψ_s 就成为

$$\psi_s\sim\sum(2n+1)e^{+i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta)\frac{e^{ikr}}{kr}. \qquad (44.6)$$

若把 ψ_s 写成

$$\psi_s\sim\frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}, \qquad (44.7)$$

則散射振幅 $f(\theta)$ 是

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)e^{+i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta). \qquad (44.8)$$

$|f(\theta)|^2$ 給出了方向分布，散射的微分截面积为

$$\sigma(\theta)2\pi\sin\theta\,d\theta=|f(\theta)|^2 2\pi\sin\theta\,d\theta. \qquad (44.9)$$

于是总截面积为

$$\sigma=\int\sigma(\theta)2\pi\sin\theta\,d\theta=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin^2\delta_n. \qquad (44.10)$$

若与前节的对应关系比較的話，可以知道是完全相同的。

与 (43.14) 相对应的是

$$\mathrm{Im}(f(0))=\frac{k}{4\pi}\sigma. \qquad (44.11)$$

3) **波在剛体球面上的散射** 首先考虑波在半徑 a 的剛体球面上的散射。这时 ψ 在 $r=a$ 处必須等于 0. 从 (44.4) 可得

$$j_n(ka)+A_n h_n^{(1)}(ka)=0, \qquad (44.12)$$

由此可以决定 A_n. 若令

$$h_n^{(1)}=-i|h_n^{(1)}|e^{-i\delta_n}, \qquad (44.13)$$

則有 $j_n=-|h^{(1)}|\sin\delta_n$，因此 δ_n 恰好是周相移动。因为 $n_n=$

$-|h^{(1)}|\cos\delta_n$，所以也可写成

$$\tan\delta_n=\frac{j_n(ka)}{n_n(ka)}. \qquad (44.14)$$

当波长甚长，$ka\ll 1$ 时，$\delta_0\sim -ka$，$\delta_1\sim\frac{-1}{3}(ka)^3$，…，因此散射几乎成为球对称的，于是

$$\sigma\sim 4\pi a^2 \quad (ka\ll 1).$$

这是几何学上横截面面积的四倍。

当波长較短时，作完全同于前节的計算可得

$$\sigma\sim 2\pi a^2 \quad (ka\gg 1).$$

这时阴影散射也构成尖銳的前方散射，且有

$$f_s(\theta)\sim -\frac{ia}{2}\cot\frac{\theta}{2}J_1(ka\sin\theta). \qquad (44.15)$$

4) **色散公式** 在以上几节討論了具有一定頻率 ω 的稳定波的散射。但是因为 $\omega=ck$ 所以当 ω 变化时 k 也变化。由 Fourier 变換可以知道，随着时間而变动的波可以由具有种种頻率 ω 的波迭加而成。因此如果求得了对于一切 k 的解，即使波随着时間变动，在原則上也能解出。如果能够把周相移动 δ 当作 k 的函数求出，k 为一定时的解就可以決定了。

能够証明，在 k 的函数 δ 之中存在着某种內部关系。也就是說 $\delta(k)$ 和 $\delta(k')$ $(k\neq k')$ 不可能完全沒有关系。关于这个問題試就被球对称势所散射的波的 δ_0 来加以考察。这种情况也能适用于波在有折射率的球面上的散射。

以原点为中心的球对称势存在时，Schrödinger 波动方程可以写为

$$\nabla^2\psi+k^2\psi-U(\boldsymbol{r})\psi=0. \qquad (44.16)$$

这里的 U 是势和 $2m/\hbar^2$ 的乘积。利用 Helmholtz 方程的 Green 函数 e^{ikR}/R，就能把入射波 $e^{i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}}$（$\boldsymbol{k}_0$ 在极坐标的 z 軸的方向）和散

射波同时存在的解写为

$$\psi(\boldsymbol{r})=e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}U(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1. \quad (44.17)$$

这是决定 ψ 的积分方程，解这个方程自然得到适合边界条件的解。

当 $|\boldsymbol{r}|$ 很大时(44.17)的散射波的渐近式为

$$f(\theta,k)\frac{e^{ikr}}{r}=-\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}_1}U(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1. \quad (44.18)$$

其中 $f(\theta,k)$ 是散射振幅，θ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴之間的角，而且把 $\boldsymbol{r}$ 方向的长度为 k 的矢量写成了 $\boldsymbol{k}_s$.

为了求 f 就必需知道 ψ，这个問題还沒有解决。但是当散射不强的时候可以用逐次代人法求 ψ，把它代入 f 的右边可得

$$\left.\begin{aligned}&f(\theta,k)=\sum f_n(\theta,k),\\&\text{这里}\\&f_n(\theta,k)=\left(\frac{-1}{4\pi}\right)^n\int d\tau_1\cdots d\tau_n\\&\qquad\times\frac{U(\boldsymbol{r}_1)U(\boldsymbol{r}_2)\cdots U(\boldsymbol{r}_n)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|\cdots|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|}\\&\qquad\times e^{-i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}_1+ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+\cdots+ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|+i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}_n}.\end{aligned}\right\} \quad (44.19)$$

当 U 甚小时，把 $f\sim f_1$ 所表示的近似叫做 Born 近似。在这里暫不討論上列展开式的收斂性，只由此式导出它的定性的結論。

在 f_n 中，与 k 相关的仅是指数函数項。在前方散射的場合，因为 $\boldsymbol{k}_s=\boldsymbol{k}_0$，所以指数成为

$$\begin{aligned}i\boldsymbol{k}_0\cdot(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_1)+ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+ik|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|\\+\cdots+ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|.\end{aligned}$$

然而以 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 为顶点的多角形的 $n-1$ 个边的和 $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+\cdots+|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|$ 必大于其余的一边 $|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_1|$. 从而不論 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots\boldsymbol{r}_n$ 位于何处，上式必为

$$ik \times (\text{正数})$$

的形状。从而把該指数函数看作复数 k 的函数时，在上半面 $(\mathrm{Im}\, k>0)$ 必是有界函数。仅用这个性质就能导出有用的結果。因为 f_n 中含有关于 $\boldsymbol{r}_1 \cdots \boldsymbol{r}_n$ 的积分，我們必須假定这样的积分一致收斂，并且总和(44.19)也是一致收斂的。

$f(z)$ 在 z 的上半面是正則单値函数，当 $|f(z)|^2$ 沿着上半面的平行于实軸之直綫的积分有界时，就能用 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx,$$

此式对于上半平面的点 z 成立。如果使 z 接近于实軸，則成为

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx.$$

这里的 P 表示 Cauchy 主値。把这个积分分解成实部与虛部，令 $f(z)=f_r(z)+if_i(z)$，就有

$$\left.\begin{aligned} f_r(z)&=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_i(z)}{x-z}\,dx,\\ f_i(z)&=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_r(z)}{x-z}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{44.20}$$

这叫做 Hilbert 的关系。

現在把这个关系应用于 $f(0, k)$. 为此必須对于实数 $k<0$ 来定义 $f(0, k)$. 当然要把它看做从上半面作解析延拓而得的結果。再回顾 $f(0, k)$ 的式子，可知

$$f(0, -k)=f(0, k)^*. \tag{44.21}$$

这样，就得到

$$\left.\begin{aligned} f_r(z)&=\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{xf_i(x)}{x^2-z^2}\,dx,\\ f_i(z)&=-\frac{2z}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{f_r(x)}{x^2-z^2}\,dx, \end{aligned}\right\}\quad z>0. \tag{44.22}$$

可以預想当 $n>1$ 时若 k 变大則 $f_n(0, k)$ 变小。与此相反，

$$f_1(0, 0) = -\frac{1}{4\pi}\int U(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1 = f_1(0, k)$$

是实值常数。于是若把 $f(0, k) - f_1(0, k)$ 看做 $f(z)$，即能应用上式。从而

$$\operatorname{Re} f(0, k) = \frac{2}{\pi} P\int_0^\infty \frac{k' \operatorname{Im} f(0, k')}{k'^2 - k^2} dk' + f_1(0, 0). \quad (44.23)$$

根据(44.8)，

$$f(0, k) = \frac{1}{k}\sum(2n+1)e^{i\delta_n}\sin\delta_n,$$

$$\operatorname{Im} f(0, k) = \frac{k\sigma(k)}{4\pi},$$

由此可得

$$\operatorname{Re} f(0, k) = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin\delta_n(k)\cos\delta_n(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} P\int_0^\infty \frac{k'^2\sigma(k')}{k'^2 - k^2} dk' + f_1(0, 0). \quad (44.24)$$

这是把不同的 k 值的总截面积 $\sigma(k')$ 和某一势的前方散射相結合的結果，从积分关系命名为色散公式。

这个式子是在 $f(0, k) - f_1(0, 0)$ 的平方可积的假定下导出的。从而不能象刚体球的情况那样，把它应用于当 k 变大时而 $\sigma(k)$ 趋近于常数值 $2\pi a^2$ 的場合。

在这种場合，如果 $\dfrac{f(0, k) - f(0, 0)}{k^2}$ 在 $k=0$ 也是有界的，且如果这个函数适合上述条件，則

$$\operatorname{Re} f(0, k) = \frac{2k^2}{\pi} P\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0, k')}{k'(k'^2 - k^2)} dk' + f(0, 0), \quad (44.25)$$

这是一个有用的公式。如果 $k=0$ 成問題的話，就把該处避开，可以取 $(k+\alpha)^2$ 代替 k^2. 如取 α 的虚部为正，則 $(k+\alpha)^{-2}$ 在上半平面成正則。

因 $f(0, k)$ 是种种的部分波的总和，仅以(44.24)不可能决定

部分波的 δ_n. 为此要求很多的关系。例如在负的 z 轴，假想距原点为 r_0 的地方存有球面波的源，設

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{r_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|-ikr_0}$$

为入射波，考虑此时的散射波。如果以此代替平面波的話，(44.19)的指数函数部分就成为

$$-ik_s\cdot\boldsymbol{r}_1 + ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2| + \cdots + ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n| + ik|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_0| - ikr_0.$$

前方散射因为 $\boldsymbol{k}_s=\boldsymbol{k}_0$ 故指向 $+z$ 的方向。又因为 $kr_0=-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}_0$，所以成为

$$i\boldsymbol{k}_0\cdot(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)+ik\{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+\cdots+|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|+|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_0|\},$$

括弧部分是从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的綫段之和，所以比 $|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1|$ 大。从而与平面波的情况相同。

当 $\boldsymbol{r}$ 充分大时，利用 Green 函数的公式

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos[m(\varphi-\varphi_0)] \times P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta_0)j_n(kr)h_n(kr_0), \quad r_0>r$$

展为球面波。这里把 $h^{(1)}$ 写为 h 了。现在因为 $\boldsymbol{r}_0$ 在 z 軸上，如果 m 不为 0，$P_n^m(\cos\theta_0)$ 就等于 0. 从而

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)j_n(kr)h_n(kr_0). \quad (44.26)$$

全体的波就应該是

$$ik\sum(2n+1)P_n(\cos\theta)h_n(kr_0)r_0e^{-ikr_0} \times (j_n(kr)+ie^{i\delta_n}\sin\delta_n h_n(kr)).$$

从而在这种情形下前方散射的振幅 $f'(0,k)$ 成为

$$f'(0,k) = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h_n(kr_0)r_0e^{-ikr_0}\cdot ie^{i\delta_n}\sin\delta_n\cdot\frac{i^{-n}}{ik}$$

$$= \frac{1}{2ik}\sum(2n+1)[e^{2i\delta_n}-1]\cdot q_n(kr_0). \quad (44.27)$$

其中

$$q_n(kr_0) = kr_0 \cdot h_n(kr_0) \cdot i^{-n+1} e^{-ikr_0} \tag{44.28}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{i^m (n+m)!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{1}{(2kr_0)^m}.$$

f' 虽然是 r_0 的函数,但因 r_0 是任意的,所以与 $f'(0, k)$的色散公式中 r_0 的相同幂的项比较,就能够得出很多的关系。如果取 $1/r_0^m$ 的项,就得到

$$f_m(k) = \frac{1}{2ik^{2m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} [e^{2i\delta_n} - 1]. \tag{44.29}$$

这里所以取 k^{2m+1},是为了便于收敛,还利用了当 k 很小时 $\delta_n \propto k^{2n+1}$ 的性质。

若已知关于 f_m 的色散公式,反过来解,就能导出关于 $e^{2i\delta_n}-1$ 的色散公式。$\mathrm{Re}[e^{2i\delta_n}-1] = -2\sin^2\delta_n$ 与截面积有关。和 δ_n 直接有关的是 $\mathrm{Im}\, e^{2i\delta_n}$. 于是要用 σ_m 表示 $\mathrm{Re}\, e^{2i\delta_n}$,就必須反过来解(44.29),这时求逆矩陣就可以了。也就是可以从

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} k^{2m+1}}{(m-n)!(m+n+1)!} f_m(k)$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n'=n}^{\infty} \sum_{m=n}^{n'} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(n+m+1)!} \cdot \frac{(n'+m)!}{(n'-m)!}$$

$$\times (2n'+1)[e^{2i\delta_{n'}} - 1] = \frac{e^{2i\delta_n} - 1}{2i}$$

求得。在这里采用了

$$\sum_{m=n}^{n'} \frac{(-1)^{m-n}(n'+m)!}{(m-n)!(m+n+1)!(n'-m)!} = \frac{1}{2n'+1}, \quad n' = n,$$

$$= 0, \qquad n' > n.$$

为了求这个关系,設

$$1 = (1+x)^{-n'-n-1}(1+x)^{n'+n+1},$$

将其各项展为級数后,求 $x^{n'-n}$ 的系数就可以了,这个系数是

$$\sum_{m=0}^{n'-n}\frac{(-n'-n-1)(-n'-n-2)\cdots(-n'-n-m)}{m!}$$

$$\times\frac{(n'+n+1)!}{(n'-n-m)!(2n+m+1)!}$$

$$=(n'+n+1)\sum_{m=0}^{n'-n}\frac{(-1)^m(n'+n+m)!}{m!(n'-n-m)!(2n+m+1)!},$$

当 $n'-n=0$ 时上式为 1, $n'-n>0$ 时上式为 0. 由此能立即求得前述的关系。从而色散公式成为

$$\operatorname{Im} e^{2i\delta_n}=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}k^{2m+1}}{(m-n)!(m+n+1)!}$$

$$\times\left[\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\sum_{n'=m}^{\infty}(2n'+1)\frac{(n'+m)!}{(n'-m)!}\operatorname{Re}[1-e^{2i\delta_{n'}(k')}]}{k'^2-k^2}dk'+C_m\right],\tag{44.30}$$

$$C_m=\frac{1}{2}\left[\frac{d^m}{dk^m}\operatorname{Im} e^{2i\delta_m}\right]_{k=0}.$$

因为 $\operatorname{Re}[1-e^{2i\delta_n}]$ 是決定截面积的量,所以这就是所求的結果。

色散公式可以应用于实驗結果的整理，或考察几个实驗結果之間的关联性以及其他种种方面。如下所述，可以預想色散公式是普遍地成立;而且不用分析的計算就能考察理論的适用性,所以是很方便的公式。

上述的色散公式是从特殊情况导出的，而且作了許多假定。这些假定是关于势的多重积分的存在，級数的一致收斂等等。如果势是无限大的剛体球,就不满足这种条件,因此就不能直接应用。又如，势虽然可积，但級数并不一致收斂，級数各項的性质不能反映于总和函数，这就不能成为色散公式的証明。在上半面有 $f(0, k)$ 的极点时就有这样的事情出現。当势为引力时就形成有限空間的約束状态;可以証明,这时在上半面的虚軸上就有极点存在。在前面已經讲过，若把 $f(\theta, k)$ 用球函数展开,并且把 $e^{2i\delta_n}$ 写

成 $S_n(k)$ 时，波动函数 ψ 的渐近式中的 n 次球函数部分就是

$$A\left[(-1)^{n+1}\frac{e^{-ikr}}{2ikr}+S_n(k)\frac{e^{ikr}}{2ikr}\right](2n+1)P_n(\cos\theta). \quad (44.31)$$

其中 A 表示入射平面波的振幅。把这个解作解析延拓时，如果在 k 的上半面的虚轴上有 $S_n(k)$ 的极点存在，对于这样的 k，散射波的振幅增大。当 k 取这样的值时，如果 $AS_n(k)$ 是有限的，入射波部分必消失，只剩下 $\frac{1}{r}e^{ikr}$ 一項。如果令 $k=i\kappa(\kappa>0)$，因为这就是 $\frac{1}{r}e^{-\kappa r}$，所以当 r 增大时它就急剧地减小。从而这样的波具有有限的扩展。在量子力学中如果令 $\frac{\hbar^2}{2m}k^2=E$，这里 E 表示总能量；这时 $E=-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2<0$，即具有负能量的束縛状态。

其次考虑級数的收斂性，当能量为 0 时令 $k=0$ 则

$$f(0,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4\pi}\right)^n\int\frac{U(\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

$$\times\frac{U(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|}\cdots\frac{U(\boldsymbol{r}_{n-1})}{|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|}U(\boldsymbol{r}_n)d\tau_1\cdots d\tau_n,$$

但是当 $k\neq0$ 时，另外还有形如 $e^{ik\cdots}$ 的項，因此級数各項的絕对值不能大于它。这个积分虽然麻煩，如果回到最初的方程，考虑 $k\to0$ 时的极限值就容易計算了。这时

$$f(0,0)=\lim_{k\to0}\sum\frac{1}{2ik}[e^{2i\delta_n(k)}-1]\cdot(2n+1),$$

但是因为 $\delta_n(k)\sim(ka)^{2n+1}$，所以只考虑 $\delta_0(k)$ 就可以了。从而

$$f(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\delta_0(k).$$

假如当 $r<a$ 时 $U(r)$ 有一定的值 $-U_0$；当 $r>a$ 时 $U=0$；在这种情况下把微分方程当作球对称的来解，并且在 $r=a$ 处把解和外部的波 $e^{ikr+2i\delta_0}-e^{-ikr}$ 結合起来，即可求得 δ_0，

$$\tan(ka+\delta_0)=\frac{k}{\sqrt{k^2+U_0}}\tan\left(a\sqrt{k^2+U_0}\right),$$

由此可知

$$\frac{\delta_0(k)}{k}\sim a+\frac{1}{\sqrt{U_0}}\tan(a\sqrt{U_0}).$$

把上式就 U_0 展开，则得

$$f(0,\ 0)=a\left[\frac{1}{3}(a^2U_0)+\frac{2}{15}(a^2U_0)^2+\frac{17}{315}(a^2U_0)^3+\cdots\right],$$

这应当和前面讲过的多重积分的計算結果一致。这个級数在 $a^2U_0=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ 处收斂。当 $0<U_0<\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ 时收斂。这时 $f(0,\ k)$ 也在实軸上收斂。

但是 $U_0=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ 正是球对称束縛状态的存在条件。这因为，当 $r>0$ 时解为 e^{-kr}，当 $r=0$ 时有限解的存在条件是：

$$-k=\sqrt{U_0-k^2}\cot\left(a\sqrt{U_0-k^2}\right),$$

所以能量为 $0(k=0)$ 的束縛状态在 $\cot a\sqrt{U_0}=0$ 即 $a\sqrt{U_0}=\frac{\pi}{2}$ 时存在。

即使束縛状态存在，k 的函数 $f(0,\ k)$ 也可能是正则的。这时除去极点，f 能在上半面作解析延拓。如果在充分大的半圆上 f 的积分为 0，把 Hilbert 变换稍加修正就能得到和色散公式相似的公式。所謂稍加修正，就是加上由极点产生的殘数。

5) **色散公式与因果律**　前方散射振幅 $f(0,\ k)$ 在 k 的复平面的上半面除去极点以外成为正则的这一事实和因果律有密切的关系。例如，有平面波入射时如果 r 很大，波 ψ 成为

$$\psi\sim e^{ikz}+\frac{f(\theta,\ k)}{r}e^{ikr}\tag{44.32}$$

的形式。为了避免麻煩，考虑以速度 c 傳播的波(光波或音波)，并假定 c 和振幅无关。因此，如果令 ψ 在时間上和 $e^{-i\omega t}$ 成正比，则

$k=\frac{\omega}{c}$. 若引入时間就可以把 ψ 写为

$$\psi \sim e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}+\frac{f(\theta, \omega)}{r} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}. \tag{44.33}$$

假定入射波从远处而来，如果不发生变化，就在 $t=0$ 时到达到原点 $z=0$ 处。如果在 $z=0$ 处观察，可知 $t<0$ 时入射波为 0，$t>0$ 时才有値。若把这样的函数作 Fourier 分析，Fourier 变换就具有特殊的性质。假設 $t<0$ 时 $F(t)$ 为 0，它的 Fourier 变换就成为

$$F_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt,$$

于是 $F_1(\omega)$ 在 ω 的上半面成为正則的[假定 $F(t)$ 在实軸上可积]。从逆变换

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

可以知道，如果 F_1 具有这样的性质，当 $t<0$ 时 $F(t)=0$. 为了使 $F(t)$ 成为实数，令

$$F(-\omega)=F(\omega)^{*} \quad (\omega \text{ 为实数}) \tag{44.34}$$

就可以了。

为了从 (44.32) 作出在 $z=0$ 处当 $t<0$ 时入射波为 0 的波束，把該式乘以和 $F_1(\omega)$ 具有同样性质的 $A(\omega)$ 再积分就可以了。这样入射波就成为

$$\psi=\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} d\omega+\int \frac{f(\theta, \omega)}{r} A(\omega) e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} d\omega.$$

散射波的 Fourier 成分是

$$f(\theta, \omega) A(\omega).$$

这时如果 $f(\theta, \omega)$ 在 ω 的上半面是正則的，当 $t-\frac{r}{c}<0$ 时，散射波仍旧是 0. 这里所說的正則，和普通函数論所說的正則不同；这里所說的正則是函数在 ω 的上半面是解析的，而且它的絕对値有界(这样的条件有些过于严格，但是可以扩張为 f 在上半面有极

点，或在无限远处成为有限的极点等等)。

前面已經讲过，对于$\theta=0$的前方散射，$f(0,\omega)$是正則的。于是在这种情况下就能說：

如果入射波在$t-\frac{z}{c}<0$时为0，散射波就在$t-\frac{r}{c}<0$时为0. 这就是因果律。这就是說，入射波在被散射体散射之前不能以大于c的速度前进，因此当$t<\frac{r}{c}$时，沒有散射波发生.

关于球面波(44.30)是否也有同样的情况？比如說，散射体不超出$r<a$范圍的話，从半徑r的球面所射入的波，至少不經过$t>\frac{2(r-a)}{c}$的时間之后将不能返回。仅取出与(40.30)的[ ]成比例的項，乘以$A(\omega)e^{-i\omega t}$，則有

$$\int(-1)^{n+1}A(\omega)e^{-i\omega\left(t+\frac{r}{c}\right)}d\omega+\int A(\omega)S_n(k)e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega,$$

但是因为第一項表示当$t=-\frac{r}{c}$时从r所射入的收斂波，所以应該到$t>\frac{r}{c}+\frac{2a}{c}$时散射波才具有数值。因此，

$$S_n'(k)=S_n(k)\cdot e^{2i\frac{a}{c}\omega}=S_n(k)e^{2iak} \tag{44.35}$$

在k的上半面成为正則的这一事实正和因果律相对应。

在球对称散射的場合，具有某一n的入射波成为同一n的散射波，而絕不会与不同n的波相混，現在就首先考虑这种情形。

如果散射体不吸收波，那么入射波与散射波的振幅就应当相等，因而$|S_n(k)|^2=1$. 或者把n略去，写成

$$S'(k)S'(k)^*=1. \tag{44.36}$$

这里是就$k>0$而論的，若把它扩充于$k<0$則要約定

$$S'(-k)=S'(k)^*. \tag{44.37}$$

这对应于(44.33). 如今的情形是$\omega=ck$，这样就沒有区別k与ω

的必要，所以就約定以 ω 代替 k.

$S'(\omega)$ 是用 $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$ 定义的，当 ω 在下半面时就能用

$$S'(\omega)\quad 1/S'(\omega^*)^* \tag{44.38}$$

延拓。因为在实軸上 $S'(\omega)S'(\omega)^*=1$，所以根据 Schwartz 定理这正是解析延拓。

假設 $S'(\omega)$ 在上半面于 $\omega_\nu=\omega_{\nu r}+i\omega_{\nu i}$ 具有零点。在下半面于 ω_ν^* 具有极点。由(44.37)可見零点关于虛軸对称，因此 $-\omega_\nu^*$ 也是一个零点。又在虛軸上也有零点 $i\varkappa_\mu(\varkappa_\mu>0)$. 如果在上半面沒有极点，作乘积

$$\prod_\nu \frac{(\omega-\omega_\nu)(\omega+\omega_\nu^*)}{(\omega-\omega_\nu^*)(\omega+\omega_\nu)}\cdot\prod_\mu \frac{\omega-i\varkappa_\mu}{\omega+i\varkappa_\mu},$$

这就与 S' 具有相同的零点与极点。如果把 $S'(\omega)$ 用这个乘积来除，就成为在全平面上于有限的范圍內旣无零点也无极点的函数。由此可知❶

$$S'(\omega)=\pm e^{2i\alpha\omega}\prod_\nu \frac{(\omega-\omega_\nu)(\omega+\omega_\nu^*)}{(\omega-\omega_\nu^*)(\omega+\omega_\nu)}\prod_\mu \frac{\omega-i\varkappa_\mu}{\omega+i\varkappa_\mu}. \tag{44.39}$$

这里 $\alpha\geqslant 0$. $S(\omega)$ 也与此相同，只是 $\alpha\geqslant -a$.

在束縛状态下，S 在上半面具有极点。这时也有适当的处理方法。

作为 (44.39) 的应用，我們考虑一种特殊情况。当只有 0 点 $\omega_0=\omega_{0r}+i\omega_{0i}$ 位于实軸的近处，而且实数 ω 在 ω_0 的近处时，可以把 $S(\omega)$ 的近似式写为

$$S(\omega)\sim e^{2i\alpha\omega}\frac{\omega-\omega_0}{\omega-\omega_0^*}.$$

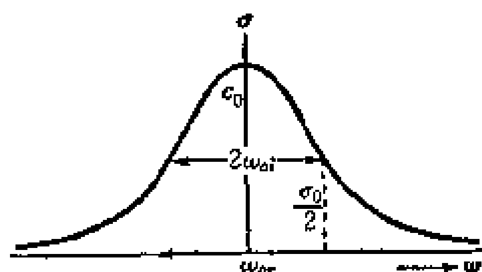


图 44.1 共鳴曲綫

表示散射体的大小的 α 如果满足 $\alpha\omega\ll 1$ 的条件，就可以令指数函数这一項为 1，这时截面的面积

❶ N. G. Van Kampen: Phys. Rev., **89** (1953), 1072; **91** (1953), 1267.

成为

$$\sigma_n = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)|1-S_n(k)|^2,$$

把上面的 ω_0, $S(\omega)$代入計算則得

$$\sigma_n = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\omega_{0i})^2}{(\omega-\omega_{0r})^2+(\omega_{0i})^2}, \qquad (44.40)$$

这叫共鳴散射式。

問題 1 設有两种共鳴 ω_1, ω_2 同时产生，試考察截面的面积和 ω 的函数关系。

6) **互易关系** (reciprocity)　現在考察一般的散射体。以球对称的散射来說，把波函数用 $P_n(\cos\theta)$ 展开，如果入射波是和 n 相对应的球面波，散射出来的也只是和同一的 n 相对应的波。如果散射体不是球对称的，即使入射波是用球函数 $P_n^m(\theta, \varphi)$ 表示的球面波，而出来的是用 $P_{n'}^{m'}(\theta, \varphi)$ 表示的波。

現在把 n, m 合并起用 n 表示，把在球面上互相垂直的球面波写为 $Y_n(\theta, \varphi)$，并假定它的模量滿足

$$\int |Y_n|^2 d\Omega = 1$$

的关系。这里 $d\Omega$ 是 $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$，还假定 Y_n 为实数。

取較大的球面(半徑 r)，在这上面取 Y_n 的球面波的入射振幅为 α_n，散射波的振幅为 β_n，則有

$$\psi \sim \sum_n \left(\alpha_n \frac{e^{-ikr}}{r} - \beta_n \frac{e^{ikr}}{r}\right) Y_n(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \qquad (44.41)$$

这时流入波的强度为 $|\alpha_n|^2$，被散射而流出的波的强度为 $|\beta_n|^2$.

当 $\alpha_m \neq 0$, $\alpha_{m'} = 0 (m' \neq m)$ 时，即只有某一类型的波 m 入射，此外沒有入射波时，把散射波写成 $\beta_n = S_{nm}\alpha_m$. 这样，在一般的情况下

$$\beta_n = \sum_m S_{nm}\alpha_m. \qquad (44.42)$$

S_{nm} 叫做散射矩阵 (scattering matrix)。其次考察关于 S_{nm} 的各种性质，还有，由 n 所能区别的波型叫做波道(channel)。

波道从 n 到 n 的反射率为 β_{nn}，从 m 到 n 的透过率为 β_{nm}.

ψ 适合波动方程 $\nabla^2\psi+(k^2-U)\psi=0$. 现在考虑适合同一方程的另一函数 φ. 根据 Gauss 定理

$$0=\int(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,d\tau=\int r^2\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\Omega. \quad (44.43)$$

上式的右端是在半徑 r 的球面上所取的积分。φ^* 和 φ 一样，也能满足这样的方程，所以

$$\int r^2\left(\varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right)d\Omega=0. \quad (44.44)$$

对应着 φ 取 $\alpha_n=\delta_{np}$ 的解，这就是只有第 p 个波道的入射球面波的情形。对应着 ψ 取 $\alpha_n=\delta_{nq}$ 的解，代入(44.43)，再利用 Y_n 的正交规范性可得

$$S_{pq}=S_{qp}. \quad (44.45)$$

这种关系叫**互易关系**。它表示从 q 波道流入从 p 波道流出的波的振幅和从 p 波道流入从 q 波道流出的波的振幅相等。

同样从(44.44)可得

$$\sum_n S^*_{np}S_{nq}=\delta_{pq}. \quad (44.46)$$

显然，对于 $p=q$ 的部分 $\sum\limits_n|S_{np}|^2=1$，这就是守恒定律。令以 S_{mn} 为元素的矩陣为 S，这叫**散射矩陣**。满足 (44.46) 的矩陣叫么正(unitary)矩陣。S 还具有对称性。

S 是 ω 和 k 的函数。一般的情况和仅有一个波道的情况不同；只由因果律，S 的对称性和么正性不容易完全确定 $S_{pq}(\omega)$ 的性质。这里只考虑接近于共鸣散射的状态，假定满足因果律的 S_{pq} 的形式为

$$S_{pq}=\frac{\alpha_{pq}}{\omega-\omega_0^*}+\beta_{pq},$$

而求常数 α, β 的值。設 ω_0 等于 $\omega_r+i\omega_i(\omega_i>0)$. α_{pq}, β_{pq} 是对称的。代入(44.46)并求它成为关于 ω 的恒等式的条件,则得

$$\sum_n \beta_{np}^*\beta_{nq}=\delta_{pq},$$

$$(\omega_0-\omega_0^*)\sum_n \alpha_{np}^*\beta_{nq}+\sum_n \alpha_{np}^*\alpha_{nq}=0.$$

以 β_{qr}^* 乘下式然后相加就得到

$$\omega_0-\omega_0^*+\sum_{nq}\frac{\alpha_{np}^*}{\alpha_{rp}^*}\alpha_{nq}\beta_{qr}^*=0.$$

由此可知 α_{np}/α_{rp} 与 p 无关。从而 α_{pq} 具有 $\alpha_{pq}=\gamma_p\gamma_q$ 的形式。利用这种关系可得

$$\frac{\omega_0-\omega_0^*}{\sum|\gamma_n|^2}+\frac{1}{\gamma_r^*}\sum_q\gamma_q\beta_{qr}^*=0,$$

第二项也和第一项一样与 r 无关,再利用 β 的么正性就得到

$$\omega_i=\frac{1}{2}\sum|\gamma_n|^2,$$

$$i\gamma_p=\sum_q\gamma_q^*\beta_{qp}.$$

当散射体,如 Helmholtz 共鸣器以及提琴的弦等,和一定的频率 ω_r 发生共振时,由波道 p 到波道 q 的散射强于直接由波道 p 到波道 q 的散射。这时因为 β_{qp} 并不通过共鸣而出现,所以当 $p\neq q$ 时可以近似地取 $\beta_{pq}=0$,这时若令

$$\gamma_p=\sqrt{\Gamma_p}\,e^{i\alpha_p},$$

则 $\beta_{pq}=i\delta_{pq}e^{2i\alpha_p}$, 所以

$$S_{pq}(\omega)=e^{i(\alpha_p+\alpha_q)}\left[\frac{\sqrt{\Gamma_p\Gamma_q}}{(\omega-\omega_r)+\frac{i}{2}\sum_n\Gamma_n}+i\delta_{pq}\right]. \quad (44.47)$$

这是仅有一个共振频 ω_r 时的 S 矩阵的普遍形式。

对于原子核反应以及电波散射等现象，也和上述的簡例一样，可以这样作一般的討論。这种方法，对于先概略地掌握現象而后决定輪廓是很有用的。至于由計算来决定 ω_r 以及 Γ_n 等常数，除了根据具体情况計算以外沒有其他的方法。但是对于理解現象的內在联系，一般說还是有效的。

問題 2 假設由 S 定义的电阻抗为 $R=i(1-S)/(1+S)$，求証 R 是对称的 Hermite 矩陣。R_{pq} 等于 R_{qp} 而且是实数，从而独立参量有 $\frac{N(N+1)}{2}$ 个。这里的 N 是波道的个数的总合。

問題 3 当仅有一个波道而 S 取(44.47)的形式时，R 应当是什么样的形式？R 的极点在何处？但这里假定 $\alpha_p=0$。

§45 小散射体

如果波和小于波长的散射体相撞击，波的影响傳播于全物体的时間为 a/c；这里 a 表示物体的大小，c 表示波的速度。若令波长为 λ，则周期为 λ/c，所以在比周期还短的时間內影响就傳播于全物体。因此考察物体周圍的波动时就可以认为波不随着时間变化。也就是說，在波动方程 $(\nabla^2+k^2)\psi=0$ 中可以把 k^2 省略。这样 $\nabla^2\psi=0$ 就成为决定势的 Laplace 方程了，比波动方程容易解。以下用几个問題为例来說明这种方法。

1) **波在球面上的散射** 假設波和半徑 a 的剛体球相撞击，并設在球面上的边界条件为 $\psi=0$. 入射波 ψ_0 可以展开为 $\psi_0=e^{ikz}=1+ikz+\cdots$。这里 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$。把 $\nabla^2\psi=0$ 用球坐标来解则得

$$\psi_s=A+\frac{B}{r}+\frac{C}{r^2}\cos\theta+\cdots.$$

为了使 $\psi=\psi_0+\psi_s$ 在 $r=a$ 处为 0(考虑在远处 $\psi_s\to0$)，取

$$A=0,\ \ B=-a,\ \ C=-ika^3,$$

假定在球的远处的散射波为

$$\psi_s = B'h_0^{(1)}(kr) + C'h_1^{(1)}(kr)\cos\theta + \cdots,$$

在球的近处 $kr \ll 1$，所以

$$\psi_s \approx -\frac{B'}{kr} - \frac{C'i}{(kr)^2}\cos\theta,$$

于是 $B' = ka$，$C' = k^3a^3$. 在球的远处因为 $h_0^{(1)} \sim -\frac{i}{kr}e^{ikr}$，$h_1^{(1)} \sim -\frac{1}{kr}e^{ikr}$，于是

$$\psi_s \sim -\frac{ka}{kr}e^{ikr} - \frac{k^3a^3}{kr}e^{ikr}\cos\theta + \cdots$$

这样就决定了 ψ_s. 把这个結果和

$$\psi_s \sim \frac{e^{ikr}}{kr}\sum(2n+1)e^{-i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta)$$

比較，就可以知道

$$\delta_0 = -ka,$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{3}(ka)^3.$$

这和前节所求的 δ_n 在 $ka \ll 1$ 时所取的近似値完全一致。

如果在 $r=a$ 的边界条件是 $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$，則当 $B=0$，$C=\frac{ika^3}{2}$ 时 $\delta_0 = 0$. 这时散射現象不容易出現。

2) **波在带状体上的散射**　現在考虑平面波和剛体带状物相撞击的情况。假定带状体是无限长的，它的中心軸和 z 軸一致，在 $x = \pm a$ 之間和 xy 面相截。并假定入射波在 z 軸的垂直方向入射而且是均匀一致的，这样就能当作二維問題处理了。这时利用橢圓坐标比較便利。假設从 $(a, 0)$，$(-a, 0)$ 到一点 (x, y) 的距离为 r_1，r_2，且令

$$r_1 + r_2 = 2a\cosh\eta,$$

$$r_2 - r_1 = 2a\cos\xi,$$

$\eta=$常数时表示同焦点的椭圓，$\xi=$常数时表示同焦点的双曲綫。解上面的方程求 x, y 则得

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cosh\eta\cos\xi,\\ y&=a\sinh\eta\sin\xi.\end{aligned}\right\}\quad(45.1)$$

Laplace 方程成为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0. \quad (45.2)$$

波动方程也能分离变数，可以用 Mathieu 函数求解，而 Laplace 方程就更簡单了。

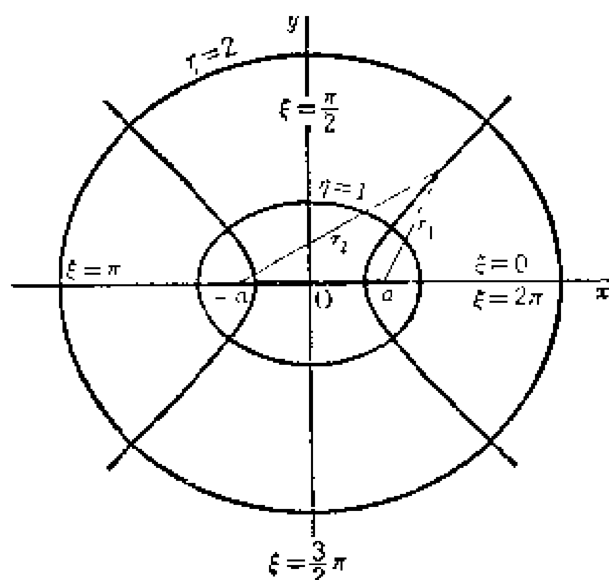


图 45.1

令 x, y 的极坐标为 r, θ，当 r 很大时

$$r_1\to r-a\cos\theta,\quad r_2\to r+a\cos\theta,$$
$$ae^{\eta}\to 2r,\qquad \xi\to\theta.$$

$\eta=0$ 表示从 $x=-a$ 到 $x=a$ 的綫段，这正相当于带的寬度。

用分离变数法解(45.2)則得

$$1,\ \eta,\ \begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\ m\eta\ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\ m\xi.$$

在带上使 ψ 为 0 的是

$$\psi=A_1\eta+\sum_m(B_m\sinh m\eta\sin m\xi+C_m\sinh m\eta\cos m\xi). \quad (45.3)$$

因为在带的面上使 $\partial\psi/\partial n=0$ 的是 $\partial\psi/\partial\eta=0$，所以

$$\psi'=A_0'+\sum_m(B_m'\cosh m\eta\sin m\xi+C_m\cosh m\eta\cos m\xi).$$

为了使 ψ' 和 $\partial\psi'/\partial n$ 在 $x>a$ 的 x 軸上連續，需要取 B_m' 在上下两半面相等。

假設入射波在 $\theta=\alpha$ 的方向进行，把它用 $e^{ik(x\cos\alpha-y\sin\alpha)}$ 来表示，另外加上散射波就可以写为

$$\psi_k=e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}+\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(1)}(kr)(D_n\sin n\theta+E_n\cos n\theta). \quad (45.4)$$

假定 ψ_k 和(45.3)的 ψ 相連接，把这个 ψ 在带的远处計算就和(45.4)相連接。因为

$$\sinh\eta\sin\xi=\frac{r}{a}\sin\theta,$$

$$\sinh\eta\cos\xi=\eta\frac{\cos\theta}{a}\approx\frac{r}{a}\cos\theta-\frac{a}{2a}\cos\theta.$$

$$\eta\sim\log\frac{2r}{a},$$

所以(45.3)的 ψ 的近似式为

$$\psi\sim A_1\log\frac{2r}{a}+B_1\frac{r}{a}\sin\theta+C_1\left(\frac{r}{a}\cos\theta-\frac{a}{2r}\cos\theta\right).$$

把(45.4)用 $kr\ll1$ 展开，并令 $\gamma=0.5772\cdots$ 就得到

$$\psi_k\sim1+ikr\cos(\theta-\alpha)+E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{kr}{2}+\gamma\right)\right]$$

$$-\frac{i}{\pi}\frac{2}{kr}(D_1\sin\theta+E_1\cos\theta)+\cdots. \qquad (45.5)$$

由此可见，与角度 θ 成正比的主要項是 $\frac{1}{r}$，但是在(45.3)中，$\frac{1}{r}$ 只是微小的修正項，于是可以說，和 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 成正比的散射几乎不存在。

比較球对称的部分，則得

$$E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{ka}{4}+\gamma\right)\right]+1=0,$$

由此即可决定 E_0. 当 r 变大时

$$\psi_k\sim e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}+E_0\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr-\frac{\pi i}{4}}. \qquad (45.6)$$

从而截面面积为

$$\sigma=\frac{4\pi}{k}|E_0|^2\approx\frac{\pi^2}{k}\frac{1}{\left|\log\frac{ka}{4}+\gamma\right|^2},$$

用 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 的关系把它改写，则为

$$\sigma=\frac{\pi\lambda}{2[\log(0.717\lambda/a)]^2}. \tag{45.7}$$

即散射和角度无关，截面面积随波长的增长而增大。这因为要把入射波抵消而使带面上的 ψ 为 0 需要大的散射波；即使入射方向和带平行，截面面积也几乎不变。

其次把同样的計算应用于 $\partial\psi/\partial n=0$ 的場合。这时把(45.4)和 ψ' 相比較，就得到

$$\psi'\approx A_0'+B_1'\left(\frac{r\sin\theta}{a}+\frac{a}{2r}\sin\theta\right)+C_1'\frac{r\cos\theta}{a}.$$

由此可知 $E_0=0$，也就是說不存在球对称的散射。又知道 $C_1'/a=ik\cos\alpha$，$E_1=0$，而且 $B_1'=iak\sin\alpha$，由此比較 $1/r$ 的系数就可以知道 D_1 等于 $-\frac{\pi}{4}k^2a^2\sin\alpha$. 从而当 $r\to\infty$ 时 ψ 的漸近式为

$$\psi_k\sim e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}-i\frac{\pi}{4}k^2a^2\sin\alpha e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr}\sin\theta. \tag{45.8}$$

由此可知角分布为

$$\sigma'(\theta)d\theta=\frac{\pi^2}{4}\frac{(ka)^4}{k}\sin^2\alpha\sin^2\theta\,d\theta, \tag{45.9}$$

$$\sigma'=\frac{\pi^2}{4}\frac{(ka)^4}{k}\sin^2\alpha.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时即在带的垂直方向强度最大。当入射方向和带平行($\alpha=0$)时散射完全不发生。这是因为散射自身就滿足 $\partial\psi/\partial n=0$ 的条件。如果入射方向和带面垂直，$\partial\psi/\partial n$ 不过是 $1/\lambda$ 的程度，因此当波长很长时散射应当很少。

3) **长狹縫** 現在以开有狹縫的无限平面来代替前項的带状体，狹縫的两边为 $x=\pm a$，这里仍旧采用椭圓坐标。

第一种边界条件是，在 $\xi=0$ 或 π 的面上 $\psi=0$；第二种边界条

件是 $\partial\psi/\partial\xi=0$. 对于第一种边界条件可以令

$$\psi=A\xi+B\sinh\eta\sin\xi+C\cosh\eta\sin\xi+\cdots, \quad (45.10)$$

对于第二种边界条件可以令

$$\psi'=A_0'+A'\eta+B'\sinh\eta\cos\xi+C'\cosh\eta\cos\xi+\cdots. \quad (45.11)$$

所考虑的波 ψ_k, 在 x 轴下半面除了入射平面波之外还有反射平面波。对于第二种条件,为了使 ψ_k' 在 xz 面上在 $\theta=\pi$ 或 $\theta=2\pi$ 之处为 0,必须令 ψ_k' 为

$$\begin{aligned}\psi_k'&=e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}+e^{ikr\cos(\theta+\alpha)}+\text{外向波}, \quad \pi<\theta<2\pi,\\ &=\text{外向波}, \quad 0<\theta<\pi.\end{aligned}$$

对于第一种边界条件则取两种平面波之差。

現在以第二种边界条件为例来闡述波在狹縫的散射。因为在 $\mu=0$ 处开有狹縫,所以在該处 ψ' 和 $\partial\psi'/\partial y$ 都連續。但是在下半面 $\partial\psi'/\partial y$ 相当于 $-\partial\psi'/\partial\mu$; 于是如果假定 (45.11) 对下半面成立,在上半面必須以 $-A'$, $-B'$ 代替 A', B'.

在下半面,令

$$\psi_k'=2+2ik\cos\theta\cos\alpha+\cdots$$
$$+E_0'H_0^{(1)}(kr)+H_1^{(1)}(kr)(D_1'\sin\theta+E_1'\cos\theta)+\cdots.$$

在离狹縫很远(和 a 相比)的地方,可以令

$$\psi'\sim A_0'+A'\log\frac{2r}{a}+\frac{B'}{a}r\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{2r^2}\right)+\frac{C'}{a}r\cos\theta+\cdots,$$

若令 $kr\ll 1$, 则

$$\psi_k'\sim 2+2ikr\cos\theta\cos\alpha+E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{kr}{2}+\gamma\right)\right]$$
$$-\frac{i}{\pi}\frac{2}{kr}(D_1'\sin\theta+E_1'\cos\theta)+\cdots.$$

比較以上两式,则得

$$A'=\frac{2i}{\pi}E_0', \quad A_0'=2+E_0'\left[\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{ka}{4}+\gamma\right)+1\right].$$

但是在上半面必须以 $-A'$, $-B'$ 代替 A', B'. 与此相应，也要以 E_0'', D_1'' 等来代替 E_0', D_1' 等等。这样替换之后，再假設在上半面只有散射波就得到

$$-A' = \frac{2i}{\pi} E_0'', \quad A_0' = E_0'' \frac{2i}{\pi} \left(\log \frac{ka}{4} + \gamma \right).$$

因此 $E_0'' = -E_0'$, 消去 A_0', 可以得到

$$E_0'' = + \frac{1}{\frac{2i}{\pi}\left(\log \frac{ka}{4} + \gamma \right) + 1}. \tag{45.12}$$

这里的 E_0'' 和(45.6)中 E_0 大小相等，符号相反。从这个結果可以知道，取第二种边界条件时从狭縫发出的散射波和取第一种边界条件时从同寬度的带状体发出的散射波恰好符号相反角分布相等。这是 Babinet 定理的一例。这里是用近似計算导出的，用波动方程的空間对称性也能导出。对狭縫取第一种边界条件，对带状体取第二种边界条件也能得同样的結果。

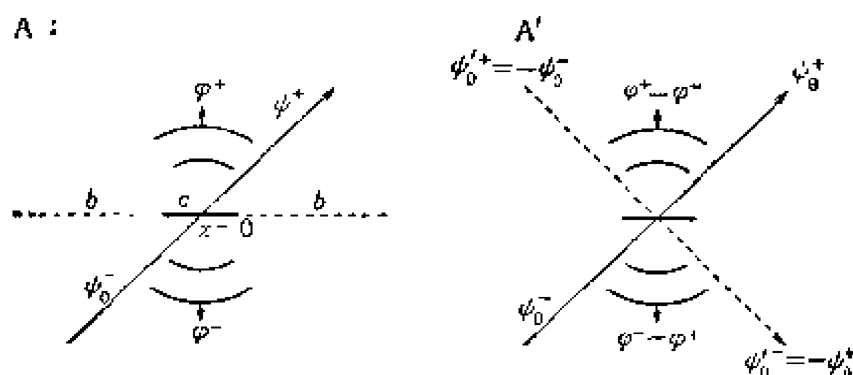


图 45.2

4) **Babinet 原理** 現在比較以下两种情况：一种是在无限广闊的平面反射壁上开有小孔 a；另一种是在 a 处有反射壁而在 a 以外沒有任何物体。設平面上 a 以外的部分为 b. 这里只要求 $a+b$ 等于全平面，a 可以是任何形状。这样就包括了前两項的狭縫和带状体。这里以下面两种情况为例来进行比較，平面的上下

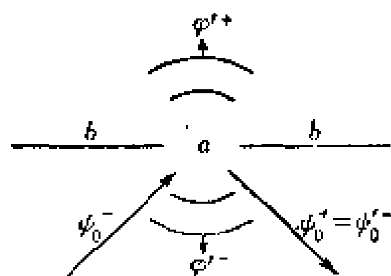
用 $+x$, $-x$ 区别，在上半面和下半面的量分别加＋和－以表示区别。

A: a 是反射板，在 b 处沒有任何物体。a 的表面满足**第一种**边界条件(图 45.2, A)。

这时，把入射波用 ψ_0，散射波用 φ^+, φ^- 表示。在 A′ 把上下反轉，然后变更其正負号再迭加起来。对于平面 $x=0$ 是反对称的，因此通过全平面来看，波的振幅則为 0. 这仅是迭加两个平面波 ψ_0 与 ψ_0' 就能满足，即使沒有边界也是一样，不会发生反射。从而 $\varphi^+-\varphi^-=0$. 由此可見，在 A 的場合，散射波是**上下对称**的。波所适合的条件是

在 a 上
$$\psi_0(0)+\varphi(0)=0,$$
在 b 的連續条件为
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0)=0.$$

B: a 是孔穴，b 是反射壁。b 满足**第二种**边界条件。这时設散射波为 φ'. 因为入射波被无限广的反射板反射，要在下半平面附加上反射波 ψ_0'，使 ψ_0' 与无孔穴时的反射波相同，把 ψ_0 扩延到上方，然后就地取其反轉了的波。B′ 表示把上下反轉了的波就地重合起来的状态。这时也和两个入射波互相重迭的情形相同，所以不会有散射波，于是就有 $\varphi'^++\varphi'^-=0$. 因此，在 B 的場合是上



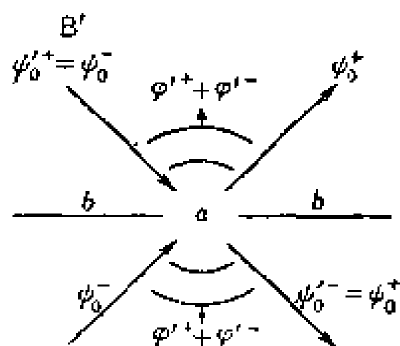


图　45.3

下反对称的。

这时，在 $x=0$ 的面上，波所适合的条件是：

在 a 的部分連續条件为

$$\varphi'(0)=2\psi_0(0)-\varphi'(0),$$

即

$$\varphi'(0)=\psi_0(0),$$

在 b 的部分

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x}(0)=0.$$

綜观以上的結果，可知 A 場合的散射波 φ 与 B 場合的散射波 φ'，在 b 的部分都适合第二种条件，在 a 的部分 $\varphi(0)$ 成为 $-\psi_0(0)$，$\varphi'(0)$ 成为 $+\psi_0(0)$. φ 与 φ' 也都适合同一波动方程，边界条件的正負相反，因此在上述空間

$$\varphi(x)=-\varphi'(x)$$

成立. 这就是說，在 a 处放一反射板而取第一种条件时的散射波，和在 a 处取小孔以其余的平面部分为滿足第二种条件的反射板时的散射波是正負相反而大小相等。这就是 Babinet 原理。

5) **波导管内的狹縫**　利用前項的結果，探討波导管內狹縫的作用。

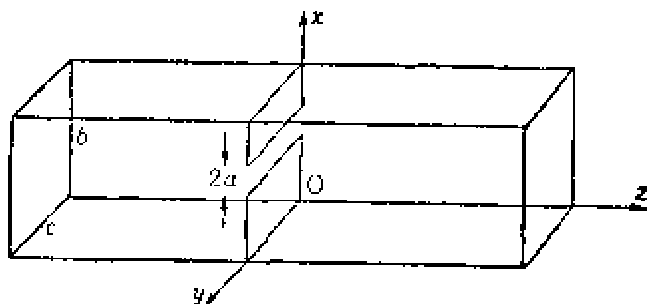


图　45.4

现在以音波为例来进行考察。假定边界滿足第二种条件，于是波长越长狹縫的作用越大。

設波导管的横截面为矩形，取坐标如图，狹縫和 y 軸平行，其

宽度为 $2a$，且使截面上下对称。令 x, y边的长度为 b, c.

用直交坐标分离变数，可知波导管内的波动方程的解为

$$\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{c}\,e^{\mu_{mn}z}e^{-i\omega t} \tag{45.13}$$

的形式。采用余弦是为了在管壁上能满足第二种条件。若对应于频率 ω 的波数为 k，则 k 就是由 ω 决定的量。为了使上面的解满足 $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$，则要求

$$\mu_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2-k^2. \tag{45.14}$$

因为 m, n 是非负的整数，所以在 $m=n=0$ 这样的基态 μ_{mn} 成为純虚数，和在没有边界的空間傳播的波完全相同。当 k 一定时，m, n 可能使 μ_{mn} 为实数。这样的波在向 z 方向进行时不是减弱就是增强，不能成为周期性的。这样的波称为遮断波。对于 (m, n)状态，使 $\mu_{mn}=0$ 的频率称为遮断頻率。这种情况不仅能在横截面为矩形的波导管内发生，在横截面为圓形、椭圆形的波导管内也能发生。解 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\mu^2\psi=0$ 就能求得横截面的本征值。在一般的情况下取第一种边界条件时和取第二种边界条件时的遮断頻率不同，而在横截面为矩形时則几乎相等。但是这时需要以正弦函数代替余弦函数，于是 $m=n=0$ 是恒等的，不存在遮断頻率。

假設从狹縫的左方送入振幅为 1 的基态波，考察通过或反射的波。因为最初的条件是在 y 軸方向没有变化，所以在狹縫中仅发生 $n=0$ 的波。所以不必考虑和 y 有关的項。假設頻率不是很高而基态以外的波都被遮断，而且假設当 $m\neq0$ 时 μ_{m0} 为实数，把它簡单地写为 μ_m.

因为在 $z=0$ 处 ψ 和 $\partial\psi/\partial z$ 都連續 $\left(在狹縫壁的两側\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0\right)$,

所以把波函数写为

$$\left.\begin{aligned}\psi&=e^{ikz}+S_{11}e^{-ikz}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi x}{b}e^{\mu_m z}, &z<0,\\&=S_{12}e^{ikz}-\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi x}{b}e^{-\mu_m z}, &z>0.\end{aligned}\right\}\tag{45.15}$$

S_{11}，S_{12} 是 S 矩陣的元素，由对称性知道 $S_{11}=S_{22}$. 利用 $\partial\psi/\partial z$ 的連續性更可以得到

$$1-S_{11}-S_{12}=A_0.$$

由么正性又可以得到

$$|A_0|^2+|1-A_0|^2=1,$$

$$(1-A_0^*)A_0+A_0^*(1-A_0)=0.$$

于是，$A_0+A_0^*=2|A_0|^2$. 由此可知只用一个参量就能决定。由(45.11)可知，在狭縫面的近处，椭圆坐标 η 接近于 0，若把 x, z 用椭圆坐标写出来，則是

$$x-\frac{b}{2}\approx a\cos\xi,\quad z\approx a\eta\sin\xi,\tag{45.16}$$

而 ψ 成为

$$\psi=\text{const}+C\eta\tag{45.17}$$

的形式。从而在狭縫中間

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\sim\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{a\sin\xi}=\frac{C}{a\sin\xi},\tag{45.18}$$

$\partial\psi/\partial z$ 在狭縫以外为 0. 把这个条件利用于 $z=0$ 之处，就可以决定 A_0, A_m. 就是說

$$\begin{aligned}ikA_0+\sum\mu_m A_m\cos\frac{m\pi x}{b}&\\=\frac{C}{a\sin\xi},&\quad\text{在狭縫中間,}\\=0,&\quad\text{在狭縫以外。}\end{aligned}$$

由此可得

$$A_0=\frac{C}{ikab}\int\frac{dx}{\sin\xi}=\frac{C}{ikb}\int_0^{\pi}d\xi=-i\frac{C\pi}{kb},$$

$$\begin{aligned}A_m&=\frac{2C}{a\mu_m b}\int\cos\frac{m\pi x}{b}\cdot\frac{dx}{\sin\xi}\\&=\frac{2C}{\mu_m b}\int_0^{\pi}\cos\frac{m\pi}{b}\left(\frac{b}{2}+a\cos\xi\right)d\xi\\&=\frac{2C\pi}{\mu_m b}\cos\frac{m\pi}{2}\cdot J_0\left(\frac{ma\pi}{b}\right).\end{aligned}$$

所以求出 C 就行了。

为了决定 C，把 ψ 在狭縫近处展开之后，与(45.17)对比卽可。但是为了这种目的，不是象前节那样把 ψ 写成(45.17)，而必須作如下的近似，同时比較 ψ 在狭縫两側的値。

当波由 z 的正側趋近于狭縫的中心时

$$\psi\to\psi^+=-\frac{iC\pi}{kb}-\frac{2C\pi}{b}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{2m}}J_0\left(\frac{ma\pi}{b}\right),$$

这个級数是收斂的。

$$\psi^+=-\frac{iC\pi}{kb}-\frac{2C}{b}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left[n\pi\left(1+\frac{2a}{b}\cos\xi\right)\right]\frac{d\xi}{\mu_{2n}}\cos n\pi.$$

若以 $\frac{2\pi n}{b}$ 为 μ_{2n} 的近似值，就能計算上式中的和，卽

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi a}{b}\cos\xi\right)=-\frac{b}{4\pi}\log\left[4\sin^2\left(\frac{\pi a}{b}\cos\xi\right)\right].$$

設 $\pi a\ll b$，就能計算上面的积分，近似的結果是 $-\frac{b}{2}\log\frac{\pi a}{b}$. 在 n 很小的地方把 μ_{2n} 作如上的置换并不适宜，但是只把最初一項加以补正就可以了。

$$\psi^+\sim-\frac{iC\pi}{kb}-C\log\frac{b}{\pi a}.$$

用同样的方法可以求得

$$\psi^{-}\sim 2+\frac{iC\pi}{kb}+C\log\frac{b}{\pi a}.$$

令上面两式相等就得到

$$C=\frac{\frac{ikb}{\pi}}{1-\frac{ikb}{\pi}\log\frac{b}{\pi a}},$$

于是

$$A_0=\frac{1}{1-\frac{ikb}{\pi}\log\frac{b}{\pi a}}. \tag{45.19}$$

$|A_0|^2$ 表示透过率，即

$$|A_0|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{kb}{\pi}\log\frac{b}{\pi a}\right)^2}. \tag{45.20}$$

当 k 很小时 $|A_0|^2$ 接近于 1. 当 $\frac{kb}{\pi}\sim 1$ 时，即 k 接近于 $\frac{\pi}{b}$ 这样的遮断波数时透过率就减小。如果 k 超过这样的值，就要发生另一状态而傳播，因此有取进一步近似的必要。

此外，不难驗証(45.18)适合么正性。

問題 4 証明波导管內不被遮断的(m, n)状态的波的相速度大于自由空間的音速。这是否意味着波在管內的傳播速度大于在自由空間的傳播速度？对电磁波来說，如果相速度超过光速，是否違背相对論？

第 7 章　电磁波的边界值問題[1]

§46　Maxwell 方程

电磁場是最重要的矢量場。本章将研究真空中以及拟似真空的简单介质中的电磁場，特别是电磁振动。

电磁場的状态取决于满足下面的 **Maxwell 方程** 的四个矢量，即电場强度 $\boldsymbol{E}$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 以及电感应强度 $\boldsymbol{D}$，磁場强度 $\boldsymbol{H}$.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{46.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{46.2}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \tag{46.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho^{*}. \tag{46.4}$$

这里的 $\boldsymbol{J}$ 表示电流密度，ρ^{*} 表示电荷密度。也有把电感应的时間变化率 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 称为电感电流密度的，但这时要称 $\boldsymbol{J}$ 为傳导电流密度以示区别。因为在下一章用 ρ 表示物质密度，所以这里对电荷密度附加 * 号。

这些关系并非都是独立的，例如，取(46.1)的 div 则得

$$\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0;$$

从而 div $\boldsymbol{B}$ 与时間无关。如果考虑在充分长的时間以前不存在的場，或者以一定的频率振动的場，这样的量必須为 0，这就是(46.2). 从(46.3)与(46.4)可得

[1] 第 7 章与第 8 章由木原太郎执笔。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J}+\frac{\partial \rho^{*}}{\partial t}=0, \tag{46.5}$$

这就是表示电荷守恒的連續方程。

$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 之間，以及 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之間存在着和介质有关的独特关系，这些关系能补充 Maxwell 方程。在眞空中 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的常数倍，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的常数倍：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H}. \tag{46.6}$$

一般在均匀的各向同性的物质中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是平行的，除去强介电质或强磁性体外，則成立着比例关系：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H}. \tag{46.7}$$

这些比例常数与眞空中的比例常数的比，即 $\varepsilon/\varepsilon_0$, μ/μ_0 分别称为介电常数和磁导率，若非强磁性体，磁导率几乎等于 1.

补充 Maxwell 方程的，还有一个介于 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之間的关系。即在通常的介质中 Ohm 定律

$$\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E} \tag{46.8}$$

成立，这里的 σ 叫做电导率。

本章采用 MKS 有理单位制。在这种单位制中，电磁的量用实用单位表示，为了使各方面与此协調，长度用米，质量用公斤，时間用秒表示。这时

$$\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ 亨利/米},$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}=3.00 \times 10^8 \text{ 米/秒} \tag{46.9}$$

正等于眞空中的光速。由此可得

$$\varepsilon_0=8.85 \times 10^{-12} \text{ 法拉/米},$$

$$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=376.7 \approx 120\pi \text{ 欧}。$$

Maxwell 方程在場的变化为連續的地方成立。在不連續面处，則附加上把不連續性认为是連續性的极限所导出的下列边界条

件，即：

E_t 連續，B_n 連續，

H_t 的不連續量＝电流的面密度，

D_n 的不連續量＝电荷的面密度。

这里的下标 t 标誌矢量的切綫方向分量，而下标 n 标誌法綫方向分量。

电导率 σ 为无限大的理想导体叫做完全导体。其中电場 $\boldsymbol{E}$ 不能存在。这时根据 E_t 的連續性知道，在完全导体的表面上，$\boldsymbol{E}$ 的切綫方向分量为 0. 从而仅考慮振动电磁場的話，在表面上 $\boldsymbol{B}$ 的法綫方向分量也等于 0. 在本章研究波长在厘米程度以上的波，即所謂电波，这时把通常的金属近似地看做是完全导体。于是我們就把完全导体簡称为导体。在导体以外的空間，仅研究 ε 及 μ 全是均匀的情况。这种場合从数学物理的观点来看，与真空沒有区别。

§47 能量，动量及力

根据 Maxwell 方程可以把恒等式

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$$

改写成

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=0,$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}+\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0. \quad (47.1)$$

当場仅存于由閉曲面所包圍的領域內部时，就全域积分 (47.1)，則得

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)d\tau+\int\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,d\tau=0. \quad (47.2)$$

当电流不存在时，第一項的积分則与时間无关。当电流存在时，若

把 (47.2) 的两个积分理解为場的能量及場在单位时間所作之功,(47.2)就表示能量守恒律。这样解释的正确性将在后面説明。

其次,为了研究动量而导入电应力張量

$$\mathbf{T}^e=\varepsilon_0\begin{bmatrix} E_x^2-\frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_xE_y & E_y^2-\frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_xE_z & E_yE_z & E_z^2-\frac{1}{2}E^2 \end{bmatrix} \tag{47.3}$$

($E=|\boldsymbol{E}|$)以及磁应力張量

$$\mathbf{T}^m=\frac{1}{\mu_0}\begin{bmatrix} B_x^2-\frac{1}{2}B^2 & B_xB_y & B_xB_z \\ B_xB_y & B_y^2-\frac{1}{2}B^2 & B_yB_z \\ B_xB_z & B_yB_z & B_z^2-\frac{1}{2}B^2 \end{bmatrix}. \tag{47.4}$$

它們的和

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}^e+\mathbf{T}^m \tag{47.5}$$

就是 **Maxwell 張量**。

如果把張量的 Div 一般地定义为

$$(\mathrm{Div}\mathbf{T})_x=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}$$

等等,则

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^e=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E},$$

从而

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^e=\rho^*\boldsymbol{E}+\left(\boldsymbol{D}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right).$$

同样

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^m=\left(\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\right)+(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}),$$

最后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})+(\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})-\mathrm{Div}\,\mathbf{T}=0. \qquad (47.6)$$

当場仅存在于以閉曲面所包圍的領域內部时，就此全域积分上式就得到

$$\frac{d}{dt}\int(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\,d\tau+\int(\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\,d\tau=0. \qquad (47.7)$$

若把第一項的积分解釋为場的动量，把第二項解釋为电磁場作用于物质的力，(47.7)就是动量的守恒律。

这样的解釋如果正确的話，电磁場的**能量密度**就是 $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2$，**动量密度**就是 $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$，場的功率的密度就是 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$，場作用于物质的力(**Lorents 力**)的密度就是 $\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$. 这些关系，从(47.6)利用 $\mathbf{T}$ 的对称性就能得到，就場的全体所取的积分

$$\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})d\tau+\int\boldsymbol{r}\times(\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})d\tau=0$$

能看做是角动量的关系式，此外还能适当地解釋种种其他的关系式。

这时，(47.1)的第三项——**Poynting 矢量** $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的 div，意味着能量流的散度，(47.5)是表征电磁場張力的張量。当沒有电場，而于 z 方向存有均匀的磁場时

$$\mathbf{T}=\frac{1}{\mu_0}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}B^2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}B^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}B^2\end{bmatrix}, \qquad (47.8)$$

于是在 z 軸垂直方向有 $B^2/2\mu_0$ 的压力，在平行方向有 $B^2/2\mu_0$ 的張力。換言之，等向的压力 $B^2/2\mu_0$ 之外，在磁感应方向还有二倍的張力在作用着。磁感应的压力与張力在下一章将起重要作用。

§48 波动方程，平面波

在以下数节，要在沒有电荷和电流的場合，对于均匀的各向同性介电质应用 Maxwell 方程

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0.\end{aligned}\right\}\tag{48.1}$$

首先作第一式的 rot，借用第二式改写为

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,\tag{48.2}$$

同样关于 $\boldsymbol{H}$ 也得同形的方程

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0.\tag{48.3}$$

或利用 $\nabla^2\equiv\operatorname{grad}\operatorname{div}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}$，能把这些方程写成

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,\\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right\}\tag{48.4}$$

(48.4)中的 ∇^2 是关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的直交坐标$(x,\ y,\ z)$的 Laplace 算符。这些方程就是普通的波动方程。

在以上各式中出現的物质常数 ε,μ，在一般的情况下，随着电磁振动的速度而有所不同。严密地說，要分解为諧振动来进行討論。本章以具有一定頻率的振动为主要对象，但是关于角頻率$(2\pi\times$頻率$)$为 ω 的諧振动，則对場的量乘上时間因子 $\exp(-i\omega t)$ 然后进行复数計算，这种方法是广泛使用的。这样，Maxwell 方程(48.1)就成为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-i\omega\mu\boldsymbol{H}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}+i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0.\end{aligned}\right\}\tag{48.5}$$

波动方程(48.2),(48.3)成为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{E}=0,\\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{H}=0.\end{aligned}\right\}\tag{48.6}$$

对場的量乘上时間因子計算时,关于 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 自身在計算的結果虽然取实部(或虛部),但是需要注意这并不是綫性数量的計算。例如能量密度的时間平均可由

$$\frac{1}{4}(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\overline{\boldsymbol{H}})$$

給出($\overline{\boldsymbol{E}}$是 $\boldsymbol{E}$ 的共軛复量), Poynting 矢量的平均由 $(\boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}})/2$ 的实部給出。 这里乘 1/2 是因为复量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 所表示的是它的振幅的最大值。

振动性的电磁場滿足 Maxwell 方程,当然也滿足波动方程;而其中最基本的是平面波, 現在仅于必要的范圍内对平面波加以闡述。假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都与 x, y 无关, 并假定 $\boldsymbol{E}$ 只有 y 分量(直綫偏振),这样 $\boldsymbol{H}$ 就只有 x 分量。于是令

$$\left.\begin{aligned}E_y=E_0\exp(-i\omega t+ikz),\\ -H_x=H_0\exp(-i\omega t+ikz)\end{aligned}\right\}\tag{48.7}$$

(E_0, H_0 为实值),然后代入(48.6)从

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu\quad 即\quad k=\pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\tag{48.8}$$

就能得到傳播常数 k,波的傳播速度是 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, 在眞空中則等于(46.9).

为了求 E_0 和 H_0 的关系,必須回到 Maxwell 方程(48.5)。由于采取了(48.7)的形式, $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ 是永远成立的。在第一式只需要考虑 x 分量,在第二式只需要考虑 y 分量,两式分别給出

$$kE_0-\omega\mu H_0=0,$$
$$-kH_0+\omega\varepsilon E_0=0.$$

由此消去 E_0 和 H_0 的結果就是(48.8)。于是得到

$$\frac{E_0}{H_0}=\frac{\omega\mu}{k}=\frac{k}{\omega\varepsilon}=\pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

[正負号和(48.8)的順序相同]。因为 $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 的单位是欧，所以这个量有介质的波动阻抗之称。关于能量的密度，有关电的項和有关磁的項相等，而且明确了能流的平均值等于能量密度的平均值乘以速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$。

直綫偏振的平面波

$$\left.\begin{aligned}E_y&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,H_0\exp(-i\omega t+ikz),\\-H_x&=H_0\exp(-i\omega t+ikz),\end{aligned}\right\}\quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\qquad(48.9)$$

可以看做在平行于 xz 面两块十分宽广的导体平面間傳播的波(图48.1)，这时只要假設 $\boldsymbol{E}$ 在导体表面上的切綫分量为 0 就可以了；而(48.9)恰好滿足这种要求。

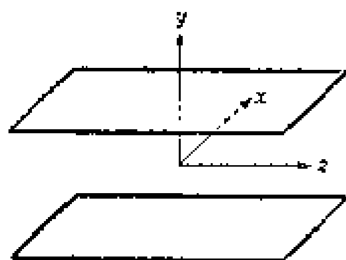


图 48.1 在平行平面間傳播的横波

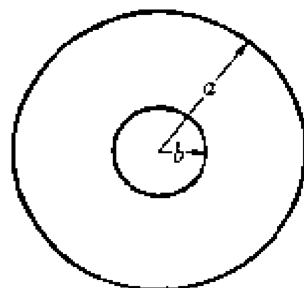


图 48.2 同軸电纜

在导体圓筒的中央装入一段更細的导体圓柱而成的**同軸电纜**，就相当于由上述平行平面卷成的同軸圓筒，取圓柱的軸为 z 軸，且导入由 $x=r\cos\theta$, $y=r\cos\theta$ 給定的圓柱坐标(r, θ, z)；于是在两柱面間傳播的电磁波是由只有 r 分量的 $\boldsymbol{E}$ 和只有 θ 分量的 $\boldsymbol{H}$ 构成的。很容易証明

$$\left.\begin{aligned}E_r&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\;\frac{H_0}{r}\;\exp(-i\omega t+ikz),\\H_\theta&=\frac{H_0}{r}\exp(-i\omega t+ikz),\end{aligned}\right\}\quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\;(48.10)$$

是滿足 Maxwell 方程和导体面的边界条件的一种可能的波。这里的 ε, μ 是两圓柱面間的介质常数，如果两圓柱面間是眞空或空气，这个横波的速度就等于光速 $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

若求在两圓柱面間傳播的电磁波的能量，把

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{2}E_r\overline{H}_\theta$$

于两圓柱的截面之間积分就可以了。令外側及內側的圓的半徑分别为 a 及 b，所傳送的电力就是

$$\int_b^a\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{H_0^2}{r^2}2\pi r\,dr=\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_0^2\log\frac{a}{b}. \qquad (48.11)$$

两个导体的表面电流的密度等于导体表面上的 H_θ，且只有 z 分量。从而通过內側导体的总电流是以 $2\pi r$ 乘(48.10)的 H_θ，即

$$I=2\pi H_0\exp(-i\omega t+ikz),$$

通过外側导体的总电流大小和上式相等正負号相反。又导体之間的电位差可由 E_r 的积分

$$V=\int_b^a E_r\,dr=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_0\log\frac{a}{b}\exp(-i\omega t+ikz)$$

給出。从而所傳送的电力(48.11)正巧等于

$$\frac{1}{2}V\overline{I}.$$

§49 波导管的一般性质

当同軸电纜的內側导体逐漸变細时，在它的近处的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 就逐漸增强，終于成为場的奇点。而在由导体构成的中空管(即**波导管**)內，不容許存在这样的奇点。于是可知：在波导管內傳播的波，和在同軸电纜內傳播的波不同，不可能完全是横波。

取两个标量函数 Φ, Ψ，假定它滿足下列波动方程：

$$\nabla^2\Phi+\omega^2\varepsilon\mu\Phi=0,\quad \nabla^2\Psi+\omega^2\varepsilon\mu\Psi=0; \qquad (49.1)$$

若把 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 的分量用 Φ, Ψ 給出如下：

$$\left.\begin{aligned} E_x&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}+i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial y}, & H_x&=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial z}-i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial y},\\ E_y&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}, & H_y&=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z}+i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x},\\ E_z&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\omega^2\varepsilon\mu\Phi, & H_z&=\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\omega^2\varepsilon\mu\Psi, \end{aligned}\right\}\tag{49.2}$$

則这些分量能滿足 Maxwell 方程(48.5)的所有的方程。直接代入就可以驗証，而(49.2)的推导經过要在电磁势这一节中叙述。

(49.2)能推广到把綫素 ds 用

$$ds^2=h_1^2\,d\xi^2+h_2^2\,d\eta^2+dz^2\tag{49.3}$$

表示的一般柱坐标：

$$\left.\begin{aligned} E_\xi&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial z}+\frac{i\omega\mu}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta},\\ H_\xi&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\,\partial z}-\frac{i\omega\varepsilon}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\\ E_\eta&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\,\partial z}-\frac{i\omega\mu}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi},\\ H_\eta&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta\,\partial z}+\frac{i\omega\varepsilon}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \end{aligned}\right\}\tag{49.4}$$

(E_z, H_z 和(49.2)相同)。

現在考察波导管内的电磁波。如果沿着管取 z 軸，在管壁上的 $\boldsymbol{E}$ 必須滿足这样的条件：卽 $\boldsymbol{E}$ 的 z 分量 E_z 和沿横截面的周界的切綫方向分量 E_τ 都必須为 0。取壁面的外法綫 ν，若依 ν, τ, z 的順序把它取为右手坐标系(图 49.1)，則

$$E_\tau=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\,\partial z}-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}.\tag{49.5}$$

从而在壁面上必需加上

$$\text{边界条件：}\quad \Phi=0,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\nu}=0.\tag{49.6}$$

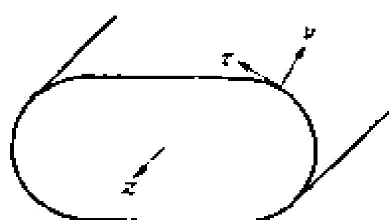


图 49.1　ν, τ 的取法

因为关于 Φ 和 Ψ 的边界条件是彼此独立的，所以满足 $\Phi=0$ 的場和满足 $\Psi=0$ 的場可能是独立存在的。对于前者，z 分量只是 H_z，所以称之为 H 型的場或 H 波；对于后者，以同样的理由称之为 E 型的場或 E 波。而一般的場(49.2)是用 H 型和 E 型的和表示的。

对于管中的电磁場，則取頻率为 ω 的 H 型，且令

$$\Psi=\psi(x, y)\exp(-i\omega t+i\beta z). \tag{49.7}$$

代入(49.1)，若令

$$\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2=\omega_c^2\varepsilon\mu \tag{49.8}$$

則得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\omega_c^2\varepsilon\mu\psi=0. \tag{49.9}$$

ψ 的边界条件显然和 Ψ 相同，

$$\text{边界条件:}\quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}=0. \tag{49.10}$$

把 ψ 所适合的微分方程(49.9)和边界条件(49.10)合并考虑，就是二維的**本征值問題**，这里的**本征值**是一系列离散的数值，如果 $\omega_c^2\varepsilon\mu$ 等于其中的某一个，**本征函数** $\psi(x, y)$ 就存在。当 $\omega_c^2\varepsilon\mu$ 等于某一个本征値时，由(49.8)就可以决定 β^2，由这个傳播常数 β 和本征函数 ψ 所决定的 Ψ 表示 H 型的波。

由(49.8)知道，当 $\omega>\omega_c$ 时 $\beta^2>0$，和它对应的波是能傳播到远方的**行波**。当 $\omega<\omega_c$ 时 $\beta^2<0$，和它对应的波是振幅按指数函数减小的**衰减波**。当振动的角頻率 ω 恰等于 ω_c 时是波被遮断(cut-off)的分界，所以称 ω_c 为**遮断角頻率**，它的 2π 分之1叫做**遮断頻率**或临界頻率。和遮断頻率相对应的自由空間波长

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{\omega_c}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{49.11}$$

叫做**遮断波长**或临界波长。

当 β 为实数时，即表示行波时，把管内的波长标以guide的字头記为 λ_g，于是

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}}, \tag{49.12}$$

而相速度由

$$\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}} \tag{49.13}$$

給出，这就是說，管内波长(49.12)是自由空間波长 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 的 $1/\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}$ 倍。相速度 (49.13) 是波在自由空間的速度 $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 的 $1/\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}$ 倍。

在管内，相速度虽然增大，但能量的傳播速度 v_g 当然要小于 v. 現在从种种的观点来計算 v_g.

(i) 一般地說，管内波的形状虽然复杂，但是可以看做是由无数的（在特殊情况是有限的）平面波合成的。取定一种波型之后，它就有一定的管内波长，因此可以考虑，这种元素平面波和管的方向恒成一定的傾斜角 θ，即

$$\lambda=\lambda_g\cos\theta.$$

关于元素平面波，当然可以认为，能量要以波在自由空間的速度 $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 来傳播，因此能量在管的方向傳播的速度可以由

$$v\cos\theta=v\frac{\lambda}{\lambda_g}=v\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \tag{49.14}$$

給出。

(ii) 在管的单位长度内所含有的平均能量可以由在全截面上所作的积分

$$\frac{1}{4}\iint(\varepsilon\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{E}}+\mu\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{H}})dxdy \tag{49.15}$$

給出；但是根据(49.7)所規定的場，这个量应当是

$$\frac{\mu}{4}\{(\omega^2\varepsilon\mu+\beta^2)D(\psi)+(\omega_c^2\varepsilon\mu)^2J(\psi)\}. \qquad (49.16)$$

这里的 $D(\psi)$ 和 $J(\psi)$ 表示在全截面上所取的积分，即

$$\left.\begin{aligned} D(\psi)&=\iint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,\\ J(\psi)&=\iint\psi^2\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (49.17)$$

(49.16)的第二項可以变形如下：

$$\begin{aligned}\iint\omega_c^2\varepsilon\mu\psi^2\,dx\,dy&=-\iint\psi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy\\ &=\iint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+\oint\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,d\tau.\end{aligned}$$

在第二变形中曾利用了 Green 定理，最后一项是沿着周界的綫积分，但是因为 $\partial\psi/\partial\nu=0$ 所以这一項为 0．于是

$$D(\psi)=\omega_c^2\varepsilon\mu J(\psi). \qquad (49.18)$$

利用 $\omega_c^2\varepsilon\mu=\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2$ 就可以把(49.16)写为

$$\frac{\mu}{2}\,\omega_c^2\,\varepsilon\mu D(\psi). \qquad (49.19)$$

另外，在管中流通的能量由 Poynting 矢量的平均

$$\frac{1}{2}\iint\boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}}\,dx\,dy=\frac{\mu}{2}\,\omega\beta D(\psi) \qquad (49.20)$$

給出，所以能量的流速 v_g 可以由(49.20)除以(49.19)所得的結果

$$v_g=\frac{\beta}{\omega\varepsilon\mu}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \qquad (49.21)$$

給出。

(iii) 上面所得的 v_g 又等于 $(d\beta/d\omega)^{-1}$，这就是所謂**群速度**。如所周知群速度所表示的是能量运送的速度。

以上虽然是仅就 H 波論述的，但是关于 E 波也几乎相同，只就由

$$\Phi=\varphi(x,y)\exp(-i\omega t+i\beta z)$$

定义的 φ 来进行討論就可以了。φ 和 ψ 不同的是

$$\text{边界条件:}\quad \varphi=0. \tag{49.22}$$

§50 矩 形 管

現在把前节所討論的事項，就截面为矩形的管来进行具体的討論。通过截面的中央取 z 軸。令矩形的长、短边分别为 $2a$ 和 $2b$，在长、短边的平行方向取 x、y 軸（图 50.1）。首先考察 H 型的振动。关于 $\psi(x, y)$ 的本征值問題(49.8)，把(49.9)用分离变数法解出，就求得本征函数：

$$\psi(x, y)=\cos\frac{m\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{n\pi(y+b)}{2b} \tag{50.1}$$

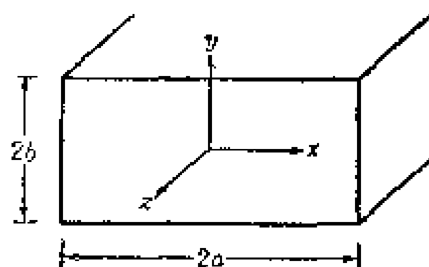


图 50.1 矩形管内的坐标取法

及相应的本征值

$$\omega_c^2\varepsilon\mu=\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2. \tag{50.2}$$

（这里省略了乘于本征函数的任意常数，以下同此。）这里的 m, n 虽然是整数

$$m, n=0, 1, 2, \cdots \tag{50.3}$$

但是 m, n 不能同时为 0，如果 m, n 同时为 0 则 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$，这样

就失去了意义。由包含(50.1)的本征函数的 Ψ 函数

$$\Psi=\psi(x,\ y)\exp(-i\omega t+i\beta z),\tag{50.4}$$

$$\beta^2=\omega^2\varepsilon\mu-\omega_c^2\varepsilon\mu\tag{50.5}$$

所确定的波,叫作 H_{mn} 型波。

关于 E 波,先由本征函数

$$\varphi(x,\ y)=\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}\tag{50.6}$$

作出 Φ 函数:

$$\Phi=\varphi(x,\ y)\exp(-i\omega t+i\beta z),\tag{50.7}$$

由 Φ 就能确定 E_{mn} 型波。这时 β 虽然能用(50.5),(50.2)表达,但 $m,\ n$ 要从1开始,

$$m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.\tag{50.8}$$

先不考虑正方形,即 $a=b$ 的情况,而令 $a>b$,这时 $\omega_c^2\varepsilon\mu$ 的最小振动型显然是 H_{10} 型。因此可以說 H_{10} 波是一种最容易通过的波型。通常总是这样选取管的大小:只許这种**基本波**即 H_{10} 型波进行,把其他型的波完全遮断;这样可以有种种的便利。为此必須使

$$\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2<\omega^2\varepsilon\mu<\left(\frac{\pi}{a}\right)^2,\ \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2.\tag{50.9}$$

对于自由波長 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 来說,必須使

$$4a>\lambda>2a,\ 4b.\tag{50.10}$$

关于由

$$\Psi=\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(-i\omega t+i\beta z),\tag{50.11}$$

$$\beta^2=\omega^2\varepsilon\mu-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\tag{50.12}$$

确定的基本波,如果求 $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}$ 而略去时間因子,則得

$$\left.\begin{aligned} E_y &= i\omega\mu\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z), \\ H_x &= -i\beta\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z), \\ H_z &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z). \end{aligned}\right\} \tag{50.13}$$

若在上式中令

$$\beta=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\theta,\ \frac{\pi}{2a}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\theta \tag{50.14}$$

而把 cos 和 sin 改写为指数函数，就很容易了解，上述的場可以用两个平面波的和来表示，波的进行方向和 z 軸成的角为 $\pm\theta$. 在前节曾經把管內波看做平面波的迭加，就矩形管来說这种想法的正确性就更明显了。

属于一个本征值的独立本征函数有两个以上时，则称这个本征值为简并(degeneration). 就矩形管来說，属于(50.2)的本征函数，当 $m\neq0,n\neq0$ 时，有 H_{mn} 型的和 E_{mn} 型的，所以这个本征值至少是二重简并的。当管的截面为正方形时，最低的本征值简并，而 H_{10} 型和 H_{01} 型的波具有相同的遮断波长，这种现象是不希望发生的，实际上并不使用。当长边 $2a$ 恰好为短边 $2b$ 的 2 倍时，仅次于最容易通过的 H_{10} 波的波型的本征值简并，第一高諧波成为 H_{01} 型和 H_{20} 型的波的迭加。这样的管，在只有一种行波的条件下，可以取較大的截面，所以很方便。

其次考察本征函数 $\psi(x, y)$ 或 $\varphi(x, y)$的对称关系和节点。

对于 H_{10} 型，则

$$\psi(-x, y)=-\psi(x, y),\ \psi(x, -y)=\psi(x, y), \tag{50.15}$$

亦即 $\psi(x, y)$是 x 的奇函数 y 的偶函数。如果把 x, y 的偶函数記为"偶"，则 H_{10} 的对称关系可以写为：

$$H_{10}\text{型:}\quad \psi=x\times\text{偶}。 \tag{50.16}$$

这样，当 $x=0$ 时 $\psi=0$，所以 $x=0$ 就是 ψ 的**节綫**。H_{01} 型的对称关系是：

$$H_{01}\text{ 型：}\quad \psi=y\times\text{偶}, \tag{50.17}$$

反过来說，在适合这种对称关系的范圍内具有最小本征值的是 H_{01} 型。在 $\psi=xy\times$ 偶的范圍具有最小本征值的是 H_{11} 型，在 $\psi=$ 偶的范圍，当 $a>b$ 时是 H_{20} 型。这些型的本征函数的节綫如图 50.2 的左半所示。图中用纵綫所連結的振动型属于同一的本征值。对于 $a=b$ 的情况可以当作矩形管的极限来理解，在这里也稍加說明。这时属于同一本征值的 H_{20} 型和 H_{02} 型都对称于 x 軸和 y 軸，从而由它們的綫性結合所成的一般本征函数也对称于 x 軸和 y 軸。为了和圆管的情况对应，画出了其中的

$$\psi(x,\ y)=\cos\frac{2\pi(x+a)}{2a}-\cos\frac{2\pi(y+a)}{2a},$$

$$\psi(x,\ y)=\cos\frac{2\pi(x+a)}{2a}+\cos\frac{2\pi(y+a)}{2a}$$

的图形。

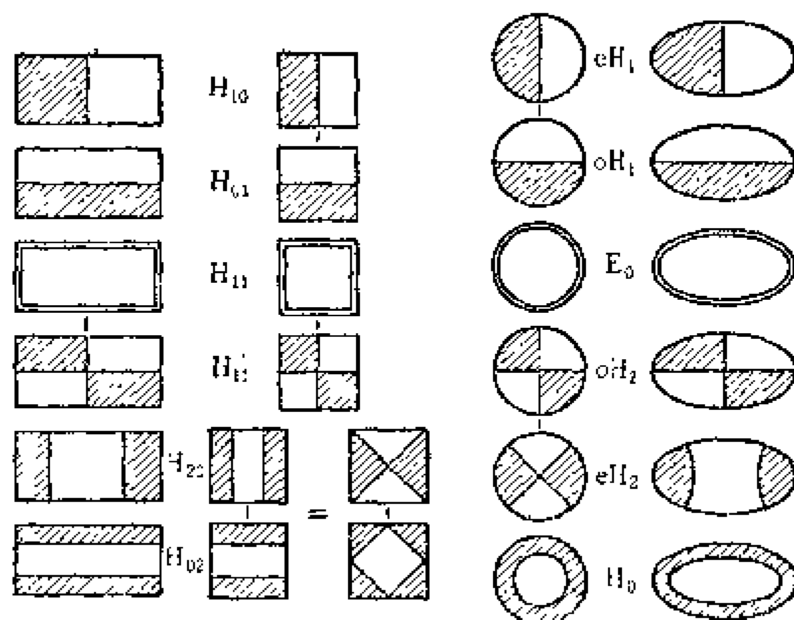


图 50.2　矩形管和椭圆管的固有振动

关于 E 型振动，遮断频率最低的是 E_{11} 型的本征函数，它是 x 和 y 的偶函数，所以除去边缘以外沒有其他的节綫。

一般地說，E 振动中的 φ 函数可以和膜振动相对比：如果把均匀的膜張于和管的截面形状相同的框上，膜的振动就相当于 φ 函数；H 振动中的 ψ 函数可以和水的振动相对比：如果容器和管具有同形的截面，水振动时水面的高度就相当于 ψ 函数。这种比喻对熟悉力学振动的人，在理解管内波的形状方面有很大的帮助。

图 50.2 的右端一行，表示截面为椭圓形的波导管的各种振动型。对椭圓管的波型所加的名称和矩形管的完全不同。把截面用

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b \tag{50.18}$$

表示时，如果 $\psi(x, y)$ 是 y 的偶函数：

$$\psi(x, -y)=\psi(x, y),$$

则把它的 H 型冠以 even 的字头名为 eH. 如果 $\psi(x, y)$ 是 y 的奇函数：

$$\psi(x, -y)=-\psi(x, y),$$

则把它的 H 型冠以 odd 的字头名为 oH. 对于 E 型也按照 $\varphi(x, y)$ 关于 y 的偶，奇定义为 eE, oE. ψ 的只以 y 軸为节綫的 eH 型名为 eH_1，只以 x 軸为节綫的 oH 型名为 oH_1. 由矩形管来类推，或参考椭圓容器中的水的振动，就可以想象，eH_1 是最容易通过的。当椭圓逐漸变为圆时，把振动型所具有的放射状的节綫的条数写在它的右下方，定义为 eH_n 等等。虽然区别了偶和奇，区别了 H 型和 E 型，而且給出了放射状节綫的条数，但是还不能确定振动型，通常把其中具有最小本征值的单独称为 eH_n 等等。右下标为 0 时，只有偶函数，显然 oH_0, oE_0 是不存在的。各振动型中节綫的位置可以用图 50.2 的右半来表示。

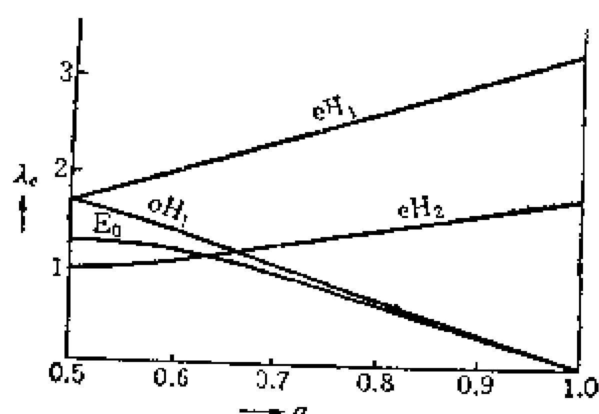


图50.3　椭圓管($a+b=1$)中重要波型的遮断波长

在椭圓管中，本征值最小的振动型是 eH_1，其次的：当 a, b 的差很小时是 oH_1 型；当 $a \gg b$ 时是 eH_2 型。在它們的中間还有 oH_1, eH_2, E_0 中的某一个。关于这四种振动型的遮断波长 λ_c，可以用变分法計算，其結果❶如图50.3所示。由这个图可以知道，在椭圓管中也和在矩形管中一样，最容易通过的振动型和仅次于它的第一高諧波都属于 H 型。

§51　长方体空腔中的固有振动

前节討論了矩形管內的固有振动，现在考察它的一种特殊情况，即 E_{11} 型振动的傳播常数恰好为0的情况，这时

$$\Phi=\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b}\exp(-i\omega t),\qquad(51.1)$$

$$\omega^2\varepsilon\mu=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2.\qquad(51.2)$$

如果略去时間的因子，就可以把 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 用

$$\left.\begin{aligned}E_z&=\omega^2\varepsilon\mu\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b},\\H_x&=-i\omega\varepsilon\frac{\pi}{2b}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{\pi(y+b)}{2b},\\H_y&=i\omega\varepsilon\frac{\pi}{2a}\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b}\end{aligned}\right\}\qquad(51.3)$$

給出，其他的分量都是0。因为上式所表示的場永远滿足 $E_x=E_y=0$，所以在管的两个位置，例如 $z=\pm c$，插入两块导板，其間的

❶ 木原太郎：导波管(修教社，1948)，§11。

空腔部分的場也是一种可能状态。換句話說，(51.3) 是边长为 $2a$, $2b$, $2c$ 的长方体空腔(图 51.1)的固有振动的一种，它的角頻率 ω 可以由(51.2)求出，和 $2a$, $2b$ 有关。也就是說，固有頻率 $\omega/2\pi$ 等于波导管的 E_{11} 型振动的遮断頻率。

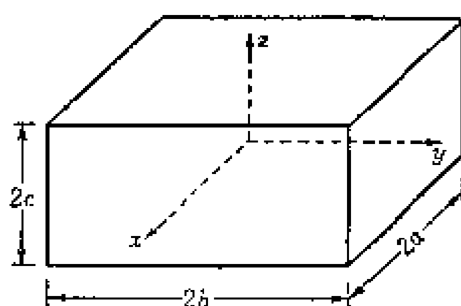


图 51.1 长方体空腔

由 (51.3) 可以知道 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的周相差是 $\pi/2$. 如果計算場的平均能量，可得下面的結果：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{4}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}|E_z|^2\,dx\,dy\,dz=\frac{\varepsilon}{2}abc(\omega^2\varepsilon\mu)^2,\\&\frac{\mu}{4}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}(|H_x|^2+|H_y|^2)\,dx\,dy\,dz\\&\qquad=\frac{\mu}{2}abc\omega^2\varepsilon^2\left\{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(51.4)$$

参照(51.2)就可以知道这两个結果相等。这就是說，关于空腔內的电磁振动，电能的时間平均和磁能的时間平均相同。电能和磁能的振动性的轉变也能在空腔內进行。这样的事实，如果着眼于空腔壁上的电流，就更明显了。假定在某时刻在空腔壁的上面有正电荷，下面有負电荷，而且电流沒有流通($|\boldsymbol{E}|$ 极大, $\boldsymbol{H}=0$). 这样，电流必定要通过空腔壁从电位高的上面流向电位低的下面。当上面的正电荷和下面的負电荷同时消失时电流达到极大($|\boldsymbol{H}|$ 成为极大, $\boldsymbol{E}=0$)，这时感应起电力又使电流继續流动。这样达到上面带有和最初同量的負电荷而下面带有和最初同量的正电荷时

电流即停止($|\boldsymbol{E}|$成为极大，$\boldsymbol{H}=0$)。以后这样的过程返复进行。

(51.3)虽然是这个空腔的一个固有振动，但是一般的固有振动是滿足波动方程和边界条件的两种場的結合，一种場由

$$\Phi=\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\cdot\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}\cdot\cos\frac{l\pi(z+c)}{2c}\cdot\exp(-i\omega t) \tag{51.5}$$

来确定，另一种場則由

$$\Psi=\cos\frac{m\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{n\pi(y+b)}{2b}\sin\frac{l\pi(z+c)}{2c}\exp(-i\omega t) \tag{51.6}$$

来确定。这时本征値和 ω 的关系可以由

$$\omega^2\varepsilon\mu=\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2 \tag{51.7}$$

給出。这里的 m, n, l 是整数，即 0, 1, 2, …，但是三个整数中至多有一个为0. 如果令三边中的最短的为 $2c$，在各种型的固有振动中，頻率最低的(**基本振动**)是

$$m=n=1,\quad l=0 \tag{51.8}$$

的振动，这就是(51.3)。

由(51.5)所确定的E振动有时被称为 E_{mnl} 型的固有振动；由(51.6)所确定的固有振动有时被称为 H_{mnl} 型的固有振动；本来在长方体空腔中，三个坐标是同等的，这样的区別并沒有很大的意义。如果在 $\boldsymbol{E}$ 的方向取 y 軸，E_{110} 型的(51.3)就成为 H_{101} 型的振动。这时 H_{101} 型的振动和在矩形管中向正、負方向傳播的两个 H_{10} 波[向正方向傳播的波是(50.13)，把其中的 β 的符号改变，該式就代表向負方向傳播的波]相迭加而成的駐波有相同的形状。

§52 电　磁　势

Maxwell 方程是由場的矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 間的关系：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{52.1}$$

以及它們和場的源 $\boldsymbol{J}$, ρ^* 之間的关系:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho^* \tag{52.2}$$

构成的。滿足 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=0$ 的矢量可以用某一个标量的梯度来表示，通常把这个标量称为势。如所周知，利用这样的势能使数学的計算大为簡化。对于滿足 (52.1) 的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 也能导入一种势。根据(52.1)的第 2 式令

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \tag{52.3}$$

代入第 1 式則得

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0.$$

于是可以令

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{52.4}$$

这里的 $\boldsymbol{A}$ 叫做矢量势，ϕ 叫做标量势。$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 都不能唯一地确定。取任意标量 f，以

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\,f,\quad \phi'=\phi+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{52.5}$$

代替上面两式中的 $\boldsymbol{A}$, ϕ，也能表示同一的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$.

当我們着眼于(52.2)时，总要假定介质是均匀的，各向同性的，从而 ε, μ 是常数。这样

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \sigma=0. \tag{52.6}$$

于是 (52.2) 的 $\boldsymbol{J}$, ρ^* 可以解釋为从外部供給的源。把 (52.3), (52.4)代入(52.2)則得

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial \phi}{\partial t}+\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{52.7}$$

$$\nabla^2\phi+\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho^*. \tag{52.8}$$

取 $\boldsymbol{A}'$, ϕ' 为上式的一个特解，把(52.5)代入

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

的形式中，則得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=\operatorname{div}\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{52.9}$$

这时，适当地选取 f 使上式的右端为0，就可以在 $\boldsymbol{A}$, φ 之間設定一个附加的条件(即所謂 Lorentz 条件)：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0. \tag{52.10}$$

这样(52.7)，(52.8)就成为

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{52.11}$$

$$\nabla^2\phi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho^*. \tag{52.12}$$

利用 $\nabla^2=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ 还可以把(52.11)改写为和(52.12)有同一形式的方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}. \tag{52.13}$$

这样，积分 Maxwell 方程的問題，就归着于决定 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 这两种势的問題了，它們满足同形式的微分方程。

现在稍微离开一点主题，考虑由

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{H} \tag{52.14}$$

定义的电和磁的极化矢量（ε_0, μ_0 是眞空中的常数）。下标 i 表 induced polarization (**感应极化**)，以区别以后要見到的相类似的量。当然在眞空中 $\boldsymbol{P}_i$ 和 $\boldsymbol{M}_i$ 都是0. 利用这样的关系从(52.2)中

消去 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 则得

$$\text{rot}\,\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{P}_i}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\,\boldsymbol{M}_i\right),$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho^*-\text{div}\,\boldsymbol{P}_i).$$

对这样的关系可以作如下的解释：場中有物质存在和电流分布的密度为

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}_i}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\text{rot}\,\boldsymbol{M}_i,$$

以及电荷分布的密度为

$$-\text{div}\,\boldsymbol{P}_i,$$

这三件事实是等价的。

对于从外部供給的 $\boldsymbol{J}$, ρ^* 导入同形数式：

$$\boldsymbol{J}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\text{rot}\,\boldsymbol{M},\quad \rho^*=-\text{div}\,\boldsymbol{P},\tag{52.15}$$

以联系两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$. 这里的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 无关，最初就是由外部供給的，称为**固定极化**。这时感应极化包含在 ε 和 μ 之中，如果以天綫为例，$\boldsymbol{P}$ 表示其中各部分的电偶极矩的密度；$\boldsymbol{M}$ 表示其中各部分的磁偶极矩的密度。磁偶极子也能作为小环状电流而出現。

如果把以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为源的电和磁的 Hertz 矢量 Π_e 和 Π_m 用

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\Pi_e-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_e}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{P},\\ \nabla^2\Pi_m-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_m}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}\tag{52.16}$$

导入，而且令

$$\boldsymbol{A}=\varepsilon\mu\frac{\partial\Pi_e}{\partial t}+\mu\,\text{rot}\,\Pi_m,\quad \phi=-\text{div}\,\Pi_e,\tag{52.17}$$

这样 Π_e 和 Π_m 就能同时滿足 (52.12), (52.13) 以及附加条件

(52.10)。

关于上列各式，略談一下它的相对論不变性，对于正确理解所导入的各量的意义是有帮助的。若把由 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的具有六个分量的量看做6維矢量(或4維反对称張量)，就可以把(52.1)归納成一个張量式。若以 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 作出一个6維矢量，以 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 作出一个4維矢量(即所謂**4維电流**)，(52.2)也能归納成一个張量式。更进一步，若以 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 作出一个4維矢量(即所謂**4維势**)，(52.3)和(52.4)可以归納成一个方程(52.12)；(52.13)也成为一个4維矢量式。其次，若以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 作出一个6維矢量，(52.15)就成为相对論的不变式。最后，若作出一个按照(52.16)把 Π_e 和 Π_m 組合起来的Hertz 6維矢量，(52.17)就成为一个張量式。

若把(52.17)代入(52.3)，(52.4)，就能得到把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 用Hertz矢量表示的关系式：

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_e-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_e}{\partial t^2}-\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_m}{\partial t},\qquad(52.18)$$

$$\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t}+\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi_m.$$

在 $\boldsymbol{M}=0$ 之处，利用(52.16)就能把 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}/\mu$ 用

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_m-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_m}{\partial t^2}+\varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t}\qquad(52.19)$$

来表示，在形式上和 $\boldsymbol{E}$ 很相似。

关于(52.18)和(52.19)，对于同一的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, Π_e 和 Π_m 并不是唯一确定的。例如利用滿足

$$\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0\qquad(52.20)$$

的任意 f 来表示 Π_e, Π_m，即令

$$\Pi_e=\left(0,-\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \Pi_m=\left(\varepsilon\frac{\partial f}{\partial t},0,0\right),\qquad(52.21)$$

再由上式計算 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，立即知道它們都等于0．同样

$$\Pi_e=\left(\mu\frac{\partial f}{\partial t},\ 0,\ 0\right),\quad \Pi_m=\left(0,\frac{\partial f}{\partial z},-\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad (52.22)$$

也能給出强度为 0 的場。从这些关系知道，除去特殊情况(例如沿 z 軸方向进行的平面波)，在 Π_e, Π_m 的六个分量中除去两个，例如 Π_e 在 z 軸的分量 Φ, Π_m 在 z 軸的分量 Ψ 之外，都可以取为 0. 这样取，就成为第 7 章的基本公式(49.2)。

按照推迟势的公式可以立即写出 (52.16) 的解。特别是关于諧和振动:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0\exp(-i\omega t),\quad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0\exp(-i\omega t), \qquad (52.23)$$

Π_e, Π_m 可以由

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_e(x,y,z,t)\\&\quad=\frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi\varepsilon}\iiint\boldsymbol{P}_0(x',y',z')\frac{\exp(i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)}{r}dx'dy'dz',\\&\Pi_m(x,y,z,t)\\&\quad=\frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi\mu}\iiint\boldsymbol{M}_0(x',y',z')\frac{\exp(i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)}{r}dx'dy'dz'\end{aligned}\right\}$$

$$(52.24)$$

給出。这里的 r 是源点 (x', y', z') 和着眼点的距离:

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}. \qquad (52.25)$$

当 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$ 只在某一点 (x_0, y_0, z_0) 的极近处不为 0，在其他的点都为 0 时，即可以看做偶极子时，利用它們的偶极矩:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0&=\iiint\boldsymbol{P}_0(x',y',z')dx'dy'dz',\\\boldsymbol{m}_0&=\iiint\boldsymbol{M}_0(x',y',z')dx'dy'dz'\end{aligned}\right\} \qquad (52.26)$$

可以把 Π_e, Π_m 用

$$\left.\begin{aligned}\Pi_e&=\frac{\boldsymbol{p}_0}{4\pi\varepsilon r}\exp[-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)],\\\Pi_m&=\frac{\boldsymbol{m}_0}{4\pi\mu r}\exp[-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)]\end{aligned}\right\} \qquad (52.27)$$

給出。这里的 r 是点 (x_0, y_0, z_0) 和着眼点的距离。

§53 輔助定理

一个小环状电流能用垂直于它的磁偶极子代替。但是磁偶极子的方向和电流的方向成右手螺旋关系，偶极矩等于环的面积乘以 μ 和电流 I 的积。反过来說就是：单位偶极矩的 $\exp(-i\omega t)$ 磁偶极子，相当于通过每边长为 δ 的小正方形的周边的电流 $\boldsymbol{I}=(1/\mu\delta^2)\exp(-i\omega t)$，但磁偶极子垂直于小正方形，和电流的方向成右手螺旋关系。这样的环状电流也能用排列在小正方形的周界上，单位長度内的偶极矩为

$$\frac{\boldsymbol{I}}{-i\omega}=\frac{\exp(-i\omega t)}{-i\omega\mu\delta^2} \tag{53.1}$$

的电偶极子代替。

假設在 x_0, y_0, z_0 的位置存在着指向 x 方向的单位偶极矩的磁(电)偶极子，把由它們产生的場的 Hertz 矢量 Π_e, Π_m 总括起来用 $\Pi^{mx}(\Pi^{ex})$ 表示；而且 $\Pi^{my}(\Pi^{ey})$ 也有同样的意义。这时即使偶极子附近有其他物体存在也沒有妨碍，因此 Π 将有复杂的形式。如果采用上述的替换，可以知道，从 Π^{mx} 导出的場和从

$$\frac{1}{-i\omega\mu\delta^2}\{(\Pi^{ez}\delta)_{y_0+\delta}-(\Pi^{ez}\delta)_{y_0}-(\Pi^{ey}\delta)_{z_0+\delta}+(\Pi^{ey}\delta)_{z_0}\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ey}\right)$$

导出的場是相同的。在这种意义下，可以令

$$\Pi^{mx}=\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ey}\right). \tag{53.2}$$

还可以导出把 x, y, z 順次变换的关系式。

特别是只有所要考察的偶极子存在时，Π 可以由 (52.27) 給出。这时(53.2)两边的差

$$
\left.\begin{aligned}
\Pi_e &\equiv \Pi_e^{mx} - \frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi_e^{ez} - \frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_e^{ey}\right),\\
\Pi_m &\equiv \Pi_m^{mx} - \frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi_m^{ez} - \frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_m^{ey}\right)
\end{aligned}\right\}
\tag{53.3}
$$

包括

$$
f = \frac{1}{4\pi r}\exp[-i\omega(t - \sqrt{\varepsilon\mu}\,r)]
\tag{53.4}
$$

成为

$$
\left.\begin{aligned}
\Pi_e &= \left(0, \frac{-1}{i\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{1}{i\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
\Pi_m &= \left(\frac{1}{\mu}f, 0, 0\right).
\end{aligned}\right\}
\tag{53.5}
$$

这和导出强度为 0 的場的(52.21)存在着相反关系。也就是説，在(52.21)中

$$
\text{把}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \text{换成} -\frac{\partial}{\partial y_0},\ \text{把}\ \frac{\partial}{\partial z}\ \text{换成} -\frac{\partial}{\partial z_0}
$$

就能得到(53.5)。

現在从(52.22)出发，把上述事項按照相反的顺序进行思考，对应着(53.2)就可以得到

$$
\Pi^{ex} = \frac{-1}{-i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{mz} - \frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{my}\right).
\tag{53.6}
$$

这种关系可以用偶极子替换法表述：单位偶极矩 $\exp(-i\omega t)$ 的电偶极子，可以用排列在和它垂直的，边长为 δ 的小正方形的周界上的磁偶极子代替，这时单位长度內的偶极矩必須是

$$
\frac{-1}{-i\omega\varepsilon\delta^2}\exp(-i\omega t).
\tag{53.7}
$$

分子的負号表示电偶极子的方向和右手螺旋前进方向相反。

把

$$
\Pi^{ey} = \frac{-1}{-i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mx} - \frac{\partial}{\partial x_0}\Pi^{mz}\right)
\tag{53.8}
$$

代人(53.2)則得

$$\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Pi^{mx}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mz}+i\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez},\tag{53.9}$$

同样可得

$$\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Pi^{ex}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ez}-i\omega\mu\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{mz}.\tag{53.10}$$

关于 Π^{my}, Π^{ey}，在上式中作 $x_0\to y_0$，$y_0\to -x_0$ 的变换就可以求得。根据这些关系，利用偶极子在 z 方向时的解 Π^{ez}, Π^{mz} 只通过計算就能得到关于其他任意方向的偶极子的解。

这个輔助定理（木原，1947）在利用圆柱坐标处理电磁波的边界值問題时是很有效的。它的应用例将在波导管内的輻射場的計算(§54)中見到。对于圆柱外部的輻射場也同样适用（§55）。用同样的方法还能作出輔助定理的极坐标表示(§56)。

§54　偶极子在管内的輻射

作为管内輻射場的基本問題而計算位于管内一点 x_0, y_0, z_0 而具有单位偶极矩 $\exp(-i\omega t)$ 的偶极子的輻射。这时只考察平行和垂直于管軸即 z 軸的偶极子就可以了，一般的情况可以由两者的綫性結合給出。

(i) 当磁偶极子和 z 軸平行时，輻射場显然是 H 型的，决定它的 Ψ 函数，可以利用本征函数 $\psi_n(x, y)$ 和它的波型傳播常数 β_n 写为

$$\Psi^{mz}=\sum_n A_n\psi_n(x, y)\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)].\tag{54.1}$$

在 Ψ 的右肩上所加的 mz，和前节一样，表示 z 方向的磁偶极子。关于 exp 的变量中的 ± 号，当 $z-z_0>0$ 时取 + 号，当 $z-z_0<0$ 时取 − 号。为了决定系数 A_n 而在(54.1)和假想的場

$$\Psi' = \psi_n(x, y)\exp[i\omega t - i\beta_n(z-z_0)] \tag{54.2}$$

之間应用 Green 定理

$$\iint\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial\nu}\right)dS = 0, \tag{54.3}$$

其面积分的范圍是把偶极子夹于中間的二截面 S_1, S_2 与其間的壁面所圍括的柱状体，以及包圍以 x_0, y_0, z_0 为中心的小球部分的全境界面（图 54.1）。$\partial/\partial\nu$ 表示沿領域的外法綫而取的微分系数。这样，在壁面上，由于

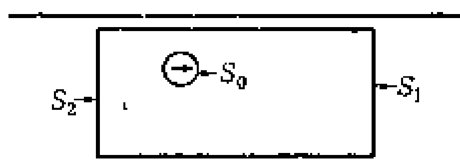


图 54.1 Green 定理 (54.3) 的积分范圍

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\Psi'}{\partial\nu} = 0$$

所以(54.3)的被积分函数为 0，在二截面 S_1, S_2 上，由于本征函数是直交的，所以

$$\iint\psi_n\psi_m\,dx\,dy = 0 \quad (n\neq m),$$

則仅剩下同于(54.2)波型的积分。这在 S_1 成为

$$\left.\begin{aligned}\iint_{S_1}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)dx\,dy &= 2i\beta_n A_n\iint\psi_n^2\,dx\,dy \\ &= 2i\beta_n A_n J(\psi_n),\end{aligned}\right\} \tag{54.4}$$

而在 S_2 成为 0. 其次是求在小球面 S_0 上的积分，导入以偶极子为中心的极坐标 r, θ, φ:

$$z - z_0 = r\cos\theta, \quad x - x_0 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y - y_0 = r\sin\theta\sin\varphi,$$

設小球面的半徑为 r_1. 在偶极子的近处，按(52.27)第二式可知

$$\left.\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{4\pi\mu r}\exp(-i\omega t), \\ \frac{\partial\Psi}{\partial r} &= -\frac{1}{4\pi\mu r^2}\exp(-i\omega t),\end{aligned}\right\} \tag{54.5}$$

因而

$$\iint_{S_0}\left(-\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial r}\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{\mu}\psi_n(x_0,y_0),\tag{54.6}$$

因(54.4)与(54.6)之和为0，故

$$2i\beta_n A_n J(\psi_n)+\frac{1}{\mu}\psi_n(x_0,y_0)=0,\tag{54.7}$$

于是(54.1)成为

$$\Psi^{mz}=\frac{1}{2\mu}\sum_n\frac{\psi_n(x_0,y_0)\psi_n(x,y)}{-i\beta_n J(\psi_n)}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)].\tag{54.8}$$

电偶极子的場合也是一样产生由

$$\Phi^{ez}=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_n\frac{\varphi_n(x_0,y_0)\varphi_n(x,y)}{-i\beta'_n J(\varphi_n)}\exp[-i\omega t\pm i\beta'_n(z-z_0)]\tag{54.9}$$

所确定的E波。这里的φ_n是固有波型，β'_n是傳播常数。

(ii) 偶极子垂直于z軸，姑且說平行于x軸的場合利用前节的輔助定理即能解决。这时显見同时发生H波及E波，于是对于单位偶极矩的磁偶极子则从(53.9)，即

$$\left.\begin{aligned}&\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Psi^{mx}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Psi^{mz},\\&\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Phi^{mx}=i\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_0}\Phi^{ez}\end{aligned}\right\}\tag{54.10}$$

得出

$$\left.\begin{aligned}\Psi^{mx}=&\mp\frac{1}{2\mu}\sum_n\frac{\psi_n(x,y)}{D(\psi_n)}\frac{\partial\psi_n(x_0,y_0)}{\partial x_0}\\&\times\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)],\\\Phi^{mx}=&-\frac{\omega}{2}\sum_n\frac{\varphi_n(x,y)}{\beta'_n D(\varphi_n)}\frac{\partial\varphi_n(x_0,y_0)}{\partial y_0}\\&\times\exp[-i\omega t\pm i\beta'_n(z-z_0)].\end{aligned}\right\}\tag{54.11}$$

但是

$$\left.\begin{aligned} J(\psi_n) &= (\omega^2\varepsilon\mu - \beta_n^2) D(\psi_n), \\ J(\varphi_n) &= (\omega^2\varepsilon\mu - \beta_n'^2) D(\varphi_n). \end{aligned}\right\} \tag{54.12}$$

对于电偶极子则从(53.10),即

$$\left.\begin{aligned} \left(\omega^2\varepsilon\mu + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Phi^{ex} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Phi^{ez}, \\ \left(\omega^2\varepsilon\mu + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right)\Psi^{ex} &= -i\omega\mu\frac{\partial}{\partial y_0}\Psi^{mz} \end{aligned}\right\} \tag{54.13}$$

得出

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{ex} = \pm\frac{1}{2\varepsilon}\sum\frac{\varphi_n(x,y)}{D(\varphi_n)}\frac{\partial\varphi_n(x_0,y_0)}{\partial x_0} \\ \times\exp[-i\omega t \pm i\beta_n'(z-z_0)], \\ \Psi^{ex} = \frac{\omega}{2}\sum\frac{\psi_n(x,y)}{\beta_n D(\psi_n)}\frac{\partial\psi_n(x_0,y_0)}{\partial y_0} \\ \times\exp[-i\omega t \pm i\beta_n(z-z_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{54.14}$$

偶极子指向 y 方向时，于(54.11)，(54.14)依次把 x 改为 y，把 y 改为 $-x$ 就可以了。

适合(54.10)的一般的 Φ，Ψ 是对(54.11)式加上 $(\omega^2\varepsilon\mu+\partial^2/\partial z_0^2)\chi=0$ 的解 χ，但是这样对結果并沒有影响。这是因为 Φ,Ψ 通过 $z-z_0$ 显然与 z 和 z_0 无关，因而 χ 也必需是这样：$(\omega^2\varepsilon\mu+\partial^2/\partial z^2)\chi=0$，本来 $(\nabla^2+\omega^2\varepsilon\mu)\chi=0$，因而 $(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)\chi=0$；因为在边界上要满足 $\chi=0$ 或 $\partial\chi/\partial\nu=0$，所以 χ 与 x，y 无关。由(49.2)知道，从这样的 χ 导出的电磁波恒为0. 而且沿 z 方向进行的平面波不能用(49.2)表示，但是对現在的情况并不成問題。

(iii) 以上求出了从单位偶极子輻射出的所有的波型，对于只有一个行进波型(H 型)的波导管，这种波形是特别重要的。这时把 ψ 函数和傳播常数的下标省略，分别写为 $\psi(x,y)$ 和 β. 这样，如果在管内一点 x_0，y_0，z_0 有电偶极子 $(p_x,p_y,p_z)\exp(-i\omega t)$ 和磁偶极子 $(m_x,m_y,m_z)\exp(-i\omega t)$ 存在，由此輻射的基本波，可以由下面的 Ψ 函数：

$$\Psi=\frac{g\psi(x,y)}{-2i\beta\mu D(\psi)}\exp[-i\omega t\pm i\beta(z-z_0)] \tag{54.15}$$

来决定，这里

$$g=m_z(\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2)\psi_0\mp i\beta\left\{m_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0+m_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0\right\}$$
$$-i\omega\mu\left\{p_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0-p_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0\right\}. \tag{54.16}$$

这里的下标 0 表示在 x_0, y_0, z_0 的值(二重符号取同位的).

在 $z-z_0>0$ 的部分，利用由(54.15)所得的

$$\left.\begin{aligned}&E_x=i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial y}, && H_x=i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial x},\\&E_y=-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}, && H_y=i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial y},\\&E_z=0, && H_z=(\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2)\Psi\end{aligned}\right\} \tag{54.17}$$

可以知道，流向 $z-z_0$ 的正方向的能量为

$$\frac{1}{2}\iint(E_x\overline{H}_y-E_y\overline{H}_x)\,dx\,dy=\frac{\omega|g|^2}{8\mu\beta D(\psi)}. \tag{54.18}$$

向 $z-z_0$ 的负侧也流出相同的能量，于是所輻射的总电力为

$$\text{輻射电力}=\frac{\omega|g|^2}{4\mu\beta D(\psi)}. \tag{54.19}$$

现在取一广泛使用的情况作为应用例：即求放在矩形管(管壁为 $x=\pm a$, $y=\pm b$, $a>b$)中的单位偶极矩的电偶极子的輻射。

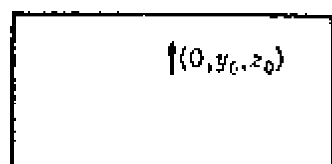


图 54.2　放在矩形管内的偶极子

但是要求偶极子的位置和方向能使輻射成最大，即假設它位于 $x=0$ 的面内而平行于 y 軸(图 54.2)。若取

$$\psi=\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}, \tag{54.20}$$

则利用

$$D(\psi)=2ab\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2,\quad g=-i\omega\mu\frac{\pi}{2a}$$

可以把(54.15)写为

$$\Psi=\frac{\omega}{2b\pi\beta}\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp[-i\omega t\pm i\beta(z-z_0)],\quad(54.21)$$

把(54.19)写为

$$\text{輻射电力}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{2a\cdot 2b}\frac{\omega\mu}{\beta},$$

或利用自由空間的波长 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 写为

$$\text{輻射电力}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{2a\cdot 2b}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}}.\quad(54.22)$$

輻射电力除以相同的偶极子在自由空間时的輻射电力

$$\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\frac{\omega^2}{\lambda^2}\quad(54.23)$$

所得的商是一个重要的量（相当于輻射阻抗的比）称为**輻射倍率**(radiation magnification)，若記为 M 則

$$M=\frac{3}{2\pi}\frac{\lambda}{2a}\frac{\lambda}{2b}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}}.\quad(54.24)$$

若以这个輻射倍率为 $2a/\lambda$, $2b/\lambda$ 的函数来画图，就得到图 54.3 的曲綫。

如果管的一端是开口的一端是閉口的，令偶极子和閉端的距离为 l (图 54.4)，則向前方輻射的电力和倍率分別等于上面求得的(54.22)，(54.24)乘以

$$\frac{1}{2}[1-\exp(2i\beta l)]^2.$$

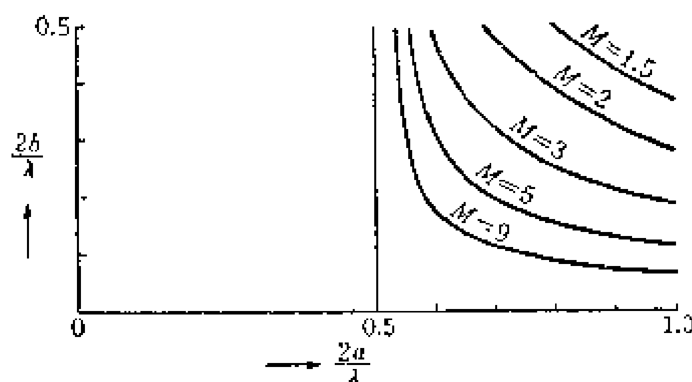


图 54.3 前图的輻射倍率 M

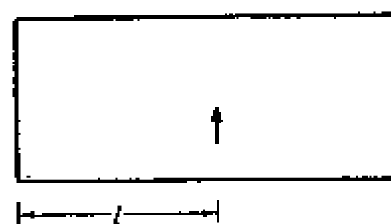


图 54.4 在有反射板的管中的輻射

§ 55 Bessel 諸函数的应用

关于在圆形截面的波导管內傳播的电磁波，圓柱形空腔共鳴器的固有振动以及电磁波在无限圓柱导体上的繞射等問題，可以用圓柱函数来处理。而对于球形空腔的固有振动和波在球形导体上的繞射問題，可以应用球函数和球 Bessel 函数(§ 56)。因为这些計算都非常复杂，所以改变从来所用的記号，尽量使数式簡单，首先对場的各量都把时間的共通因子 $\exp(-i\omega t)$ 省略。还把 $\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{E}$，$\sqrt{\mu}\boldsymbol{H}$ 改写为 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，同样把 $\sqrt{\varepsilon}\Phi$ 和 $\sqrt{\mu}\Psi$ 分别用 Φ 和 Ψ 表示。并令

$$\omega^2\varepsilon\mu=k^2.$$

这样，Maxwell 方程(48.5)就成为

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-ik\boldsymbol{H}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\&\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+ik\boldsymbol{E}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0.\end{aligned}\right\}\tag{55.1}$$

最后，关于偶极子的偶极矩，参照(52.27)把模量为 $4\pi\sqrt{\varepsilon}$ 的电偶极子和模量为 $4\pi\sqrt{\mu}$ 的磁偶极子称为“单位偶极矩”的偶极子。

1) 圓柱坐标的导入 采用圓柱坐标 (r,θ,z) 时，也能把 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 的分量用滿足波动方程

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=0,\quad \nabla^2\Psi+k\Psi=0\tag{55.2}$$

的两个标量函数 $\Phi(r,\theta,z)$，$\Psi(r,\theta,z)$給出，卽

$$\left.\begin{aligned}&E_r=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}+ik\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\quad H_r=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}-ik\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\\&E_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial z}-ik\frac{\partial\Psi}{\partial r},\quad H_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial z}+ik\frac{\partial\Phi}{\partial r},\\&E_z=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+k^2\Phi,\qquad H_z=\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+k^2\Psi.\end{aligned}\right\}\tag{55.3}$$

这样給出的分量，除去特殊情况(例如沿 z 軸进行的平面波)能滿

足方程(55.1)(§ 49、§ 52)。

波动方程(55.2)具有

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta z \cdot Z_m(hr), \quad m=0, 1, \cdots \tag{55.4}$$

形的特解(§ 8)。这里

$$h=\begin{cases} \sqrt{k^2-\beta^2}, & k^2>\beta^2, \\ i\sqrt{\beta^2-k^2}, & k^2<\beta^2. \end{cases} \tag{55.5}$$

Z_m 表示 m 次的一般圆柱(Zylinder)函数。

2) **圓柱形空腔共鳴器** 为了把圓柱坐标应用于圆柱形空腔共鳴器，而取圓柱的軸为 z 軸，这样就能利用特解(55.4)。但是为了使特解在 $r=0$ 正則，Z_m 只能采用 Bessel 函数 J_m. 在固有振动中有 $\Psi=0$(即 $H_z=0$)的 E 型振动和 $\Phi=0$(即 $E_z=0$)的 H 型振动。

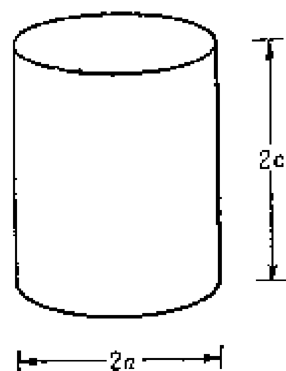


图 55.1 圆柱空腔的共振

若令空腔的半徑为 a，高为 $2c$，而取中央为原点，則表示一般 E 型振动 Φ 函数应等于

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta \cos \frac{l\pi(z+c)}{2c} J_m(hr) \tag{55.6}$$

乘以常数；这里

$$h^2=k^2-\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2, \quad m, l=0, 1, 2, \cdots. \tag{55.7}$$

在两底面的边界条件是 $E_r=E_\theta=0$，而在侧面的边界条件由

$$J_m(ha)=0 \tag{55.8}$$

給出。若把 $J_m(x)=0$ 的正根自小而大地用 $r_{m1}, r_{m2}, \cdots$ 表示，和它們对应的固有頻率 ω 則由

$$\omega^2\varepsilon\mu=k^2=\left(\frac{r_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2 \tag{55.9}$$

决定。E 型的基本振动相当于 $m=0, n=1, l=0$ 的情况，这时

$$\Phi=J_0(2.40\,r/a),\quad \omega^2\varepsilon\mu=(2.40/a)^2. \tag{55.10}$$

規定表示 H 型振动的 Ψ 数为

$$\Psi=\frac{\cos}{\sin}m\theta\sin\frac{l\pi(z+c)}{2c}J_m(hr), \tag{55.11}$$

$$J'_m(ha)=0. \tag{55.12}$$

若把 $J'_m(x)=dJ_m(x)/dx$ 的正根自小而大地用 r'_{m1}, r'_{m2}, … 表示，則固有頻率 ω 满足

$$\omega^2\varepsilon\mu=\left(\frac{r'_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2. \tag{55.13}$$

因为 r'_{mn} 中的最小的是 $r'_{11}=1.84$，所以 H 型的基本振动是 $m=1$, $n=1$, $l=1$ 的情况，这时

$$\Psi=\frac{\cos}{\sin}\theta\sin\frac{\pi(z+c)}{2c}J_1\left(\frac{1.84r}{a}\right), \tag{55.14}$$

$$\omega^2\varepsilon\mu=\left(\frac{1.84}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2c}\right)^2. \tag{55.15}$$

这是二重簡并的。

当空腔的高 $2c$ 大于直徑 $2a$ 的 1.02 倍时，H 型的基本振动就成为全体的基本振动。若令(55.15)中的 $c\to\infty$，就能得到对圓形波导管最容易通过的遮断頻率。

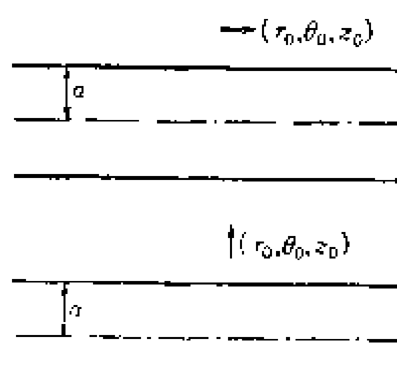


图 55.2　圓柱外部的偶极子輻射

3) 在无限圓柱外部的偶极子輻射❶　安装在車、船、飞机上的天綫的指向性要受到其他导体的影响。現在关联着这样的現象来研究电磁波在无限圓柱或球形(§ 56)导体上的繞射現象。这时的基本問題，是解决只以一个具有单位偶极矩的振动偶极子为源的輻射問題。如果能求得这类問題的解，一般情况的解就可以由它的綫性結合

❶ 小谷正雄，木原太郎：应用数学力学 1(1947)195。

給出。但是除了普通的电偶极子之外还需要考虑由环狀天綫等产生的磁偶极子。

取圆柱的軸为 z 軸,設半徑为 a, 边界条件为:

$$\text{在 } r=a \text{ 处} \quad E_\theta = E_z = 0,$$

参照(55.3)还可以用下面的关系給出:

$$\text{在 } r=a \text{ 处} \quad \Phi=0, \ \frac{\partial \Psi}{\partial r}=0. \tag{55.16}$$

(i) 当偶极子和圆柱的軸平行时, 对于电偶极子則有 $\Psi=0$, 对于磁偶极子則有 $\Phi=0$;称前者为 E 波,后者为 H 波。先考虑电偶极子。令偶极子的位置为 (r_0, θ_0, z_0), 表示一次波的 Φ 函数可以写为

$$\Phi_0 = R^{-1} \exp(ikR) \tag{55.17}$$

的形式,这里

$$R^2=(z-z_0)^2+r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\theta-\theta_0).$$

因为 Φ_0 是 $z-z_0$ 和 $\theta-\theta_0$ 的偶函数而且关于 r 和 r_0 对称, 因此可以令

$$\Phi_0=\begin{cases} i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}F_m(\beta)H_m(hr_0)J_m(hr) \\ \qquad \times\cos\beta(z-z_0)\,d\beta, \quad r_0>r, \\ i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}F_m(\beta)J_m(hr_0)H_m(hr) \\ \qquad \times\cos\beta(z-z_0)\,d\beta, \quad r_0<r. \end{cases} \tag{55.18}$$

这里的 H_m 是 m 次的第一种 Hankel 函数(即通常的 $H_m^{(1)}$), h 可由(55.5)給出,关于 ε_m 則规定

$$\varepsilon_0=1, \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=2.$$

为了决定 $F_m(\beta)$, 先考察源在远方($hr_0\gg 1$, $kz_0\gg 1$)的漸近形式。

一般地說,关于任意偶函数 $G(\beta)$ 都有如下的近似关系:

$$i\int_0^\infty G(\beta)H_m(hr_0)\cos\beta(z-z_0)\,d\beta$$
$$\sim(-i)^m G(k\cos\alpha)s_0^{-1}\exp(iks_0-ikz\cos\alpha),\qquad(55.19)$$

其中 $r_0=s_0\sin\alpha,\ z_0=s_0\cos\alpha$.

証　明　把圓柱函数的漸近式

$$H_m(hr_0)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi hr_0}}\exp\left(ihr_0-\frac{m\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i\right)$$

代入上式的左端即

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^\infty G(\beta)H_m(hr_0)\exp(i\beta z_0-i\beta z)\,d\beta$$

中，則左端近似地等于

$$\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0}}\exp\left(-\frac{m\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i\right)\int_{-\infty}^\infty g(\beta)\exp[is_0f(\beta)]\,d\beta,$$

这里

$$f(\beta)=h\sin\alpha+\beta\cos\alpha,\quad g(\beta)=G(\beta)h^{-\frac{1}{2}}\exp(-i\beta z).$$

积分采用鞍点法❶。在鞍頂上，即在

$$f'(\beta)=0\ \text{的根}\ \beta=\beta_0=k\cos\alpha$$

的地方

$$f(\beta_0)=k,\quad f''(\beta_0)=-(k\sin^2\alpha)^{-1},$$

因此

$$\int_{-\infty}^\infty g(\beta)\exp[is_0f(\beta)]\,d\beta$$
$$\sim g(\beta_0)\exp[is_0f(\beta_0)]\int\exp\left[\frac{i}{2}s_0f''(\beta_0)(\beta-\beta_0)^2\right]d\beta$$
$$=g(\beta_0)\exp(iks_0)\int\exp\left[-\frac{is_0(\beta-\beta_0)^2}{2k\sin^2\alpha}\right]d\beta.$$

---

❶ 英文名 method of steepest descent，德文名 Sattelpunktmethode，此法为 P. Debye 所創。参考书：

G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions 1922, 235 頁。

R. Courant-D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik 1931, 455 頁。

H. Fowler, Statistical mechanics, 1936. ——譯者注

积分是沿越过鞍点的路綫,即沿在 β_0 以 45° 角从左上到右下横截实軸的路綫計算的。結果是

$$\sqrt{\frac{2\pi k}{s_0}}\sin\alpha\, g(\beta_0)\exp\left(iks_0-\frac{\pi}{4}i\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi\sin\alpha}{s_0}}G(k\cos\alpha)\exp\left(iks_0-\frac{\pi}{4}i-ikz\cos\alpha\right),$$

由此即得公式(55.19)。

把这公式用于 Φ_0 的展开式,則有

$$\Phi_0\sim W_0\sum\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)J_m(kr\cos\alpha)F_m(k\cos\alpha),$$

这里面

$$W_0=s_0^{-1}\exp(iks_0-ikz\cos\alpha).$$

另一方面,从(55.17)知道

$$\begin{aligned}\Phi_0&=R^{-1}\exp(ikR)\\&\sim W_0\exp[-ikr\sin\alpha\cos(\theta-\theta_0)]\\&=W_0\sum\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)J_m(kr\cos\alpha),\end{aligned}$$

从而

$$F_m=1,\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{55.20}$$

如果令表达二次波的 Φ 函数为 Φ_1,从边界条件:

$$在\ r=a\ 处,\quad \Phi_0+\Phi_1=0 \tag{55.21}$$

即能确定它是如下的形式

$$\Phi_1=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m(ha)}{H_m(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)$$

$$\times\cos\beta(z-z_0)d\beta. \tag{55.22}$$

于是問題就基本上解决了。

現在考察波在充分远处($kr\gg1,\ kz\gg1$)的漸近式,設

$$r=s\sin\alpha,\quad z=s\cos\alpha,$$

$$W=s^{-1}\exp(iks-ikz_0\cos\alpha),$$

就可以把 $\Phi_0,\ \Phi_1$ 写为:

$$\Phi_0=R^{-1}\exp(ikR)\sim W\exp[-ikr_0\sin\alpha\cos(\theta-\theta_0)],$$

$$\Phi_1\sim-W\sum\varepsilon_m(-i)^m$$

$$\times\cos m(\theta-\theta_0)H_m(kr_0\sin\alpha)\cdot\frac{J_m(ka\sin\alpha)}{H_m(ka\sin\alpha)}.$$

但于Φ_1的变形过程中再一次使用了公式(55.19)。这时場的分量的漸近式中的主要部分——非高阶无限小量——是H_θ与$E_\alpha\equiv E_r\cos\alpha-E_z\sin\alpha$，这两者都可以用

$$E_\alpha\sim H_\theta\sim-(\Phi_0+\Phi_1)k^2\sin\alpha$$

来表示。

在磁偶极子的場合，一次波是

$$\Psi_0=R^{-1}\exp(ikR),$$

从边界条件

$$\text{在}\,r=a\,\text{处},\quad \frac{\partial\Psi_0}{\partial r}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}=0,$$

就可以确定与Ψ_0对应的二次波Ψ_1：

$$\Psi_1=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{J'_m(ha)}{H'_m(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)\cos\beta(z-z_0)d\beta$$

(撇号“′”表示对变数的微分)。在远方的漸近式为

$$\Psi_1\sim-W\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m(-i)^m$$

$$\times\cos m(\theta-\theta_0)H_m(kr_0\sin\alpha)\frac{J'_m(ka\sin\alpha)}{H'_m(ka\sin\alpha)}.$$

場的分量之中尚有E_θ及$H_\alpha\equiv H_r\cos\alpha-H_z\sin\alpha$，而且

$$E_\theta\sim-H_\alpha\sim(\Psi_0+\Psi_1)k^2\sin\alpha.$$

只需要在远处的漸近式时，可以結合着关于平面波的繞射的解和相反定理来計算，这样能稍微簡单一些。

(ii) 当偶极子与軸垂直时，Φ函数和Ψ函数都是必要的，但是利用§53的輔助定理，很容易求得这两种函数，現在把Φ和Ψ

总括地写为

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

在(r_0, θ_0, z_0)的位置、r 的方向有单位偶极矩的电偶极子时，把場的 Π 函数用 Π^{er} 表示，同样，有磁偶极子时用 Π^{mr} 表示。其他如 $\Pi^{e\theta}$ 等也可同样地定义。这样，把(53.9)的内容用圆柱坐标写出来的話，就是

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Pi^{er} = \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{ez} - \frac{ik}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \Pi^{mz},$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Pi^{mr} = \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{mz} + \frac{ik}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \Pi^{ez},$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Pi^{e\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{ez} + ik \frac{\partial}{\partial r_0} \Pi^{mz},$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Pi^{m\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{mz} - ik \frac{\partial}{\partial r_0} \Pi^{ez}.$$

例：設有 r 方向的电偶极子，求确定二次波的 Φ_1^{er} 与 Ψ_1^{er}. 从

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Phi_1^{er} = \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Phi_1^{ez}$$

$$= -i \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos(\theta - \theta_0) \int_0^{\infty} \frac{J_m(ha)}{H_m(ha)} H_m'(hr_0) H_m(hr)$$

$$\times \sin[\beta(z - z_0)] h\beta \, d\beta$$

得

$$\Phi_1^{er} = -i \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\theta - \theta_0) \int_0^{\infty} \frac{J_m(ha)}{H_m(ha)} H_m'(hr_0) H_m(hr)$$

$$\times \sin \beta(z - z_0) \frac{\beta \, d\beta}{h};$$

又从

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) \Psi_1^{er} = -ik \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \Psi_1^{mz}$$

得

$$\Psi_1^{rr}=-2k\sum_{m=1}^{\infty}m\sin m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J'_m(ha)}{H'_m(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)\times\cos\beta(z-z_0)\frac{d\beta}{hr_0}.$$

§56　球 Bessel 函数的应用

1）极坐标的导入　导入以

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

定义的极坐标 r,θ,φ，并使用前节最初所述的記号法。这时，借用适合波动方程

$$\nabla^2\frac{\Phi}{r}+k^2\frac{\Phi}{r}=0,\quad \nabla^2\frac{\Psi}{r}+k^2\frac{\Psi}{r}=0 \tag{56.1}$$

的两个标量函数 Φ 及 Ψ，所設的

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+k^2\Phi,\\
H_r&=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+k^2\Psi,\\
E_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial r}+\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\\
H_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial r}-\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\\
E_\varphi&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\partial r}-\frac{ik}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\\
H_\varphi&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\partial r}+\frac{ik}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{56.2}$$

能适合 Maxwell 方程(55.1)。采用极坐标时波动方程 $\nabla^2U+k^2U=0$ 的特解可由

$$U=z_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi,\quad \begin{matrix}l=0,1,2,\cdots\\ m=0,1,\cdots,l\end{matrix} \tag{56.3}$$

給出，这里面的 P_l^m 表示第一种的 Legendre 連带函数，z_l 表示球 Bessel 函数：

$$j_l(x)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{l+\frac{1}{2}}(x),\ h_l(x)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x)\text{等},\tag{56.4}$$

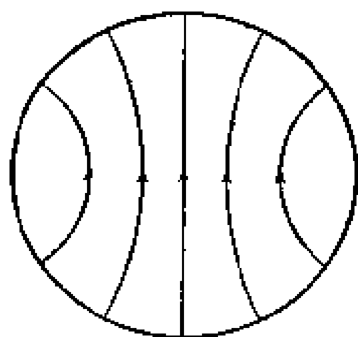


图 56.1 球形空腔的基本振动(定性的)

但是，球对称 $l=0$ 的場，因为 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的总分量消失所以沒有意义。

2) **球形空腔共鳴器** 为了把极坐标应用于球形空腔共鳴器，选取球的中心为坐标原点，这样就能利用特解(56.3)。为了使特解在 $r=0$ 正則，z_l 只能采用 j_l. 在固有振动中有 $\Psi=0$ (即 $H_r=0$)的 E 型振动和 $\Phi=0$(即 $E_r=0$)的 H 型振动。

表示 E 型振动的 Φ 函数应等于

$$krj_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi,\quad\begin{matrix}l=1,2,\cdots,\\ m=0,1,\cdots,l\end{matrix}$$

乘以常数。令空腔的半徑为 a，边界条件就是：

$$\text{在 } r=a \text{ 处},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=0.$$

若把方程

$$\frac{d}{dr}[\sqrt{x}\,J_{l+1/2}(x)]=0$$

的正根自小而大地用 $r_{l1},r_{l2},\cdots$ 表示，和它們相对应的共振波长就由

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi a}{r_{ln}}$$

决定。E 型的基本振动相当于 $l=m=1$ 的情况(图 56.1)，是三重簡并的。由 $r_{11}=2.74$ 知道，共振波长为

$$\lambda=2.29a.\tag{56.5}$$

H 型的固有频率比 E 型的基本频率全都高。

3) **在球外部的偶极子輻射** 現在討論放在导体球外部的偶极子的輻射。令球的半徑为 a，取它的中心为坐标原点。边界条

件是：

$$\text{在}\ r=a\ \text{处},\quad E_\theta=E_\varphi=0\ \text{也就是}\ \frac{\partial\Phi}{\partial r}=0\ \text{及}\ \Psi=0.$$

設偶极子具有单位偶极矩，其位置为$(r_0, \theta_0, \varphi_0)$（但其$r_0>a$）。

对于置于r方向的电偶极子，$\Psi=0$；令Φ函数为Φ^{er}。如果把一次波用下标0，二次波用下标1来表示，则

$$\Phi_0^{er}=\frac{r}{r_0}\frac{k}{R}\exp(ikR),$$

$$R^2=r_0^2+r^2-2r_0r\cos\gamma,$$

这里的γ是(θ_0, φ_0)方向与(θ, φ)方向所夹之角，即

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0).$$

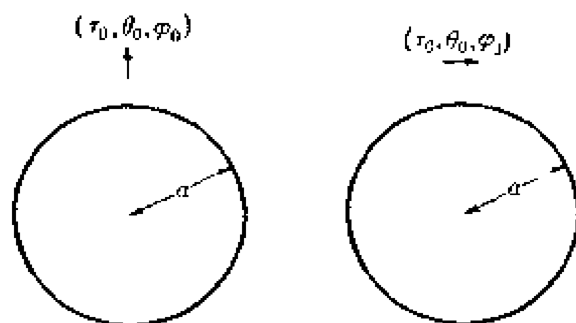


图56.2　置于导体球外部的振动偶极子

根据展开定理，当$r<r_0$时

$$\Phi_0^{er}=ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)h_l(kr_0)j_l(kr)P_l(\cos\gamma),$$

于是从边界条件

$$\text{在}\ r=a\ \text{处},\quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}=0$$

得

$$\Phi_1^{er}=-ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{[kaj_l(ka)]'}{[kah_l(ka)]'}h_l(kr_0)h_l(kr)P_l(\cos\gamma)$$

（撇号表示关于变数ka的微分）。

同样，r方向的磁偶极子

$$\Psi_0^{mr}=rr_0^{-1}R^{-1}\exp(ikR)$$

对于二次波

$$\Psi_1^{mr}=-ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{j_l(ka)}{h_l(ka)}h_l(kr_0)h_l(kr)P_l(\cos\gamma).$$

当偶极子垂直于 r 方向时，可以用关于偶极子置换的辅助定理来解决。采用极坐标时需要用 Φ 和 Ψ 的综合記号 Π 来表示这个定理。例如在 θ 方向有电偶极子时，把 Π 函数写为 $\Pi^{e\theta}$，这样就可以把辅助定理写为下面的形式：

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0^2}\right)r_0\Pi^{e\theta}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Pi^{er}-\frac{ik}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\Pi^{mr},$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0^2}\right)r_0\Pi^{m\theta}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Pi^{mr}+\frac{ik}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\Pi^{er}$$

（$\Pi^{e\varphi}$，$\Pi^{m\varphi}$ 亦同）。

例：考察在 $\theta_0=0$ 的位置在 x 方向（即 $\varphi=0$ 的方向）的磁偶极子的輻射。利用

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0^2}\right)\frac{r_0h_l(kr_0)}{l(l+1)}=\frac{h_l(kr_0)}{r_0},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta_0}P_l(\cos\gamma)\right]_{\theta_0=\varphi_0=0}=\cos\varphi P_l^1(\cos\theta),$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}P_l(\cos\gamma)\right]_{\theta_0=\varphi_0=0}=\sin\varphi P_l^1(\cos\theta)$$

得出

$$\Psi_1^{mr}=-ik\frac{r}{r_0}\cos\varphi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}$$

$$\times[kr_0h_l(kr_0)]'\frac{j_l(ka)}{h_l(ka)}h_l(kr)P_l^1(\cos\theta),$$

$$\Phi_1^{mr}=k^2r\sin\varphi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}$$

$$\times h_l(kr_0)\frac{[kaj_l(ka)]'}{[kah_l(ka)]'}h_l(kr)P_l^1(\cos\theta).$$

至于 Ψ_0^{mr}，Φ_0^{mr} 如有需要也容易求出。

兹举一具体应用。用薄金属制作的球形空腔上有狭而短的縫隙时，試求从縫隙所射出的基本振动电波(56.5)在远方的指向性。因为狭而短的縫隙与磁偶极子等价，所以能使用存有平行于球形导体表面的磁偶极子場合的解。其結果則如图56.3所示，但这里所画的，是縫隙位于$+z$軸上($\theta=0$)而在x方向，对远方磁場則着眼于xz面內的及yz面內的。而且是为了比較波长增长到极限的場合而附加的。

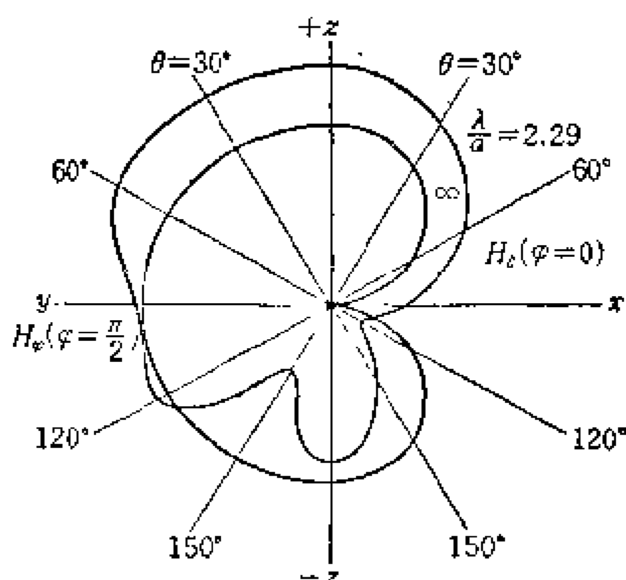


图56.3　从球形空腔上狭窄的短縫所冒出的电波的指向性。当縫隙在z軸上而与x軸平行时，图之右半和左半各表示在xz面和在yz面的指向性。a是球的半徑，$\lambda=2.29a$是球形空腔的基本振动的波长

关于这样波长之长的极限稍作說明。球的半徑a較比波长$\lambda=2\pi/k$充分小时($ka\ll1$)，球的影响可用在球的位置由感应而生的振动偶极子来代換。特別考虑原来的偶极子在球附近，即$kr_0\ll1$的場合。当偶极子在半徑的方向时，感应偶极子显見亦是同一方向(正或負)的，它們的和也在同一方向。从而在这种場合，球的影响則等于最初的偶极子的偶极矩乘一数量M。对于偶极子垂直于半徑方向的場合也能考虑这样的倍率M。M的值固然能从計算求出，但作为前述的一般形式的极限亦能导出如下：

对于半徑方向的电偶极子为$1+2(a/r_0)^3$，

对于垂直于半徑的电偶极子为$1-(a/r_0)^3$，

对于半徑方向的磁偶极子为$1-(a/r_0)^3$，

对于垂直于半徑的磁偶极子为$1+2^{-1}(a/r_0)^3$。

第8章 等离子体力学

§57 等离子体

放电管内部的气体，弧状放电电极之間的气体，地球內部的流体核，电离层，太阳等高温天体，这些都是电离了的流体，既傳导电，而且正負电荷大部抵消，就电性来說則近于中性。这样的电离流体按照 Langmuir 的命名称为等离子体 (plasma)。換句話，由电子，(正)离子 (ion)，中性原子所"混成 (πλασσειν)"的流体而电性則近于中性的东西叫做等离子体。等离子体的特征是其中的流体力学的現象与电磁現象相互影响着。

确定等离子体内的电磁場的四个矢量，即电場强度 $\boldsymbol{E}$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，电感应强度 $\boldsymbol{D}$，磁場强度 $\boldsymbol{H}$ 适合 Maxwell 方程

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{57.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{57.2}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \tag{57.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho^*. \tag{57.4}$$

这里的 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度，ρ^* 是电荷密度。从(57.3)及(57.4)即能得到关于电荷流的連續方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J}+\frac{\partial \rho^*}{\partial t}=0. \tag{57.5}$$

按照常例，假設

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \quad 及 \quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{57.6}$$

并且假設 ε 和 μ 是常数。在密度不很大的气态等离子体中，ε 和

μ 几乎等于真空中的值（ε_0 和 μ_0）。本章全面使用 MKS 合理单位制（§ 46）。

§ 58 基 础 方 程

先就由电子，各种离子，各种中性原子构成的等离子体作一般的考察，假定其中不再出現电离和再結合现象。这时把第 j 种成分粒子的质量記为 m_j，粒子的密度記为 n_j，平均速度記为 $\boldsymbol{v}_j$，这种成分流的連續方程则为

$$\operatorname{div}(m_j n_j \boldsymbol{v}_j)+\frac{\partial m_j n_j}{\partial t}=0. \tag{58.1}$$

关于各成分流的运动方程，这里采用 Euler 形的，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_j n_j \boldsymbol{v}_j)=e_j n_j(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B})-m_j n_j \operatorname{grad}\phi+\boldsymbol{R}_j$$
$$-\operatorname{Div}(\mathbf{P}_j+m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j) \tag{58.2}$$

（$\boldsymbol{vv}$ 为張量，$\operatorname{Div}_x\mathbf{P}\equiv\partial P_{xx}/\partial x+\partial P_{yx}/\partial y+\partial P_{zx}/\partial z$ 等等）。这里的 e_j 表示粒子的电荷，$\mathbf{P}_j$ 表示分压張量，$\boldsymbol{R}_j$ 表示在单位体积内作用于第 j 成分的阻力，ϕ 表示重力势。关于阻力 $\boldsymbol{R}_j$ 只考虑和其他成分摩擦而产生的，于是

$$\sum \boldsymbol{R}_j=0 \qquad （这里的\ \sum\equiv\sum_j）. \tag{58.3}$$

电荷密度和电流密度则由

$$\rho^*=\sum e_j n_j \quad 和 \quad \boldsymbol{J}=\sum e_j n_j \boldsymbol{v}_j \tag{58.4}$$

給出。

物质密度 ρ 和物质流的速度 $\boldsymbol{v}$ 则由

$$\rho=\sum m_j n_j \quad 和 \quad \rho\boldsymbol{v}=\sum m_j n_j \boldsymbol{v}_j \tag{58.5}$$

定义。这样，在(58.1)中就各成分求和就得到

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{58.6}$$

这就是物质流的**連續方程**。

同样从(58.2)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v})=\rho^{*}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{Div}(\mathbf{P}+\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}). \quad (58.7)$$

这是等离子体全体的**运动方程**。这里的 $\mathbf{P}$ 是总压張量，它和分压張量有如下的关系：

$$\mathbf{P}+\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}=\sum(\mathbf{P}_j+m_j n_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j). \quad (58.8)$$

气态等离子体的压力張量则由

$$\mathbf{P}_j=m_j n_j\langle(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)\rangle,$$

$$\mathbf{P}=\sum m_j n_j\langle(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)\rangle$$

給出。这里的 $\boldsymbol{c}_j$ 表示粒子的速度，$\langle\ \rangle$ 表示按照速度分布取平均(所以 $\boldsymbol{v}_j=\langle\boldsymbol{c}_j\rangle$)。这时(58.8)的两端都等于 $\sum m_j n_j\langle\boldsymbol{c}_j\boldsymbol{c}_j\rangle$.

(58.6)和(58.7)又可以写成下面的形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0, \quad (58.6\mathrm{a})$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}=\rho^{*}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{Div}\mathbf{P}. \quad (58.7\mathrm{a})$$

这里 $\partial/\partial t+\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}$ 意味着在流体流动方向对时間的变化率。

以 e_j/m_j 乘(58.2)，然后就全成分求和就可以得到电流的微分方程：

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}=\sum\frac{e_j^2 n_j}{m_j}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B})-\rho^{*}\,\mathrm{grad}\,\phi+\sum\frac{e_j}{m_j}\boldsymbol{R}_j$$

$$-\mathrm{Div}\sum\frac{e_j}{m_j}(\mathbf{P}_j+m_j n_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j). \quad (58.9)$$

以后还要把这个方程化成簡单的近似形式使用。

§59 一个静力学的解

在力学的静态的情况下 ($\boldsymbol{v}=0$)，通常把压力張量簡化为标量 P. 这时如果等离子体是中性的 ($\rho^{*}=0$)，运动方程就成为

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{grad}\,P=0.$$

这里的 grad ϕ 是常量，沿着它的方向取 z 軸，考虑 $\boldsymbol{B}$ 只有 z 分量的情况：

$$(B_x,\ B_y,\ B_z)=(0,\ 0,\ B(x,\ y)),$$

由于

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=\mu^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}=-(2\mu)^{-1}\operatorname{grad}B^2,$$

所以

在水平面内 $\qquad P+(2\mu)^{-1}B^2=$常数，

在鉛直方向的变化为 $\partial P/\partial z=-g\rho$ ($g=$重力加速度)。

$B^2/2\mu$ 是磁感綫的压力（参照 § 47），它和物质的压力 P 的和在同一水平面内是一定的。现在举出一个具体的数值：当 $B=0.5$ 韦伯/米^2=5000 高斯时，$B^2/2\mu=1$ 巴 $=10^5$ 牛頓/米^2。

Alfvén 曾經把这里所討論的特殊情况应用于太阳黑点的内部。通过黑点的中心作一鉛直平面，在截面上的磁感綫可以用图 59.1 表示。就是說，从太阳表面稍微进入内部一点，$\boldsymbol{B}$ 就几乎只有鉛直(z)分量。在一水平面内，磁力綫管的内部的气体压力 P 小于管外的磁压力，其差为 $B^2/2\mu$. 但是因为磁压力与 z 无关，所以管内外的 $\partial P/\partial z$ 相等，从而管内外的物质密度 ρ 也相等。由此可知，磁力綫管内的温度必低于周圍的温度。实际上，太阳表面上正常部分的温度为 6000°K，而黑点部分的温度为 4500°K. 而且已經測得黑点部分的磁場强度約为 2000 高斯。

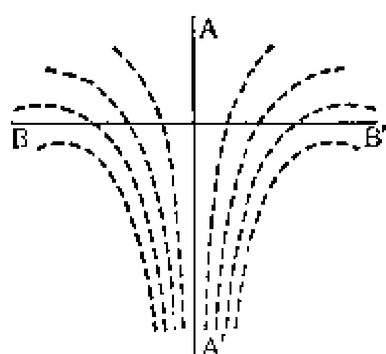


图 59.1 太阳黑点的磁力綫。AA' 是通过中心的鉛直軸，BB' 是太阳表面 (H. Alfvén: Cosmical Electrodynamics)

§ 60 能量定理，动量定理，相似原理

以 v_i 乘(58.2)，再就各成分取总和，即：

$$\sum \boldsymbol{v}_j\cdot\frac{\partial}{\partial t}(m_jn_j\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}-\rho\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\phi+\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j$$
$$-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\operatorname{Div}(\mathbf{P}_j+m_jn_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j).$$

利用 $\operatorname{Div}\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{b}$ 等公式能使上面的等式变为下面的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2+\phi\rho\right)=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}+\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\operatorname{Div}\mathbf{P}_j$$
$$-\operatorname{div}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2\boldsymbol{v}_j+\phi\rho\boldsymbol{v}\right).$$

右端是单位体积内的宏观动能和势能对时間的增加率。从这个等式和电磁場的能量定理(47.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)=-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}-\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}),$$

可以得到关于力学的和电磁学的能量定理：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2+\phi\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$
$$=\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\operatorname{Div}\mathbf{P}_j$$
$$-\operatorname{div}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2\boldsymbol{v}_j+\phi\rho\boldsymbol{v}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right).\qquad(60.1)$$

右端的第一、二两項分别表示成分流体間的摩擦及分压所作的功。第三項是能的发散，对封閉系取积分結果为 0. 在这个定理中沒有把热量計算在內，必要时要加上关于热流的等式。

如果以 $\mathbf{T}$ 表示 Maxwell 張量，就能把电磁場的动量定理用

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})=-(\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})+\operatorname{Div}\mathbf{T}$$

来表示(参照(47.6))。由上式和运动方程(58.7)就能得到全体系的动量定理：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})=-\rho\operatorname{grad}\phi-\operatorname{Div}(\mathbf{P}+\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\mathbf{T}).\quad(60.2)$$

$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{T}$ 的正負号相反是因为前者以压力的方向为正，后者以張力

的方向为正的原故。

取 s 为任意整数，很容易驗証，以上諸等式关于下列各变换是不变的：

$$(\boldsymbol{r},\ t)\to s^{-1}(\boldsymbol{r},\ t),$$

$$\text{不改变 } \varepsilon,\ \mu,\ \phi,\ m_j,\ e_j,\ \boldsymbol{v}_j,$$

$$(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H})\ \to\ s(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H}),$$

$$(\boldsymbol{J},\ \rho^*,\ \rho,\ n_j,\ \mathbf{P}_j,\ \mathbf{T})\ \to\ s^2(\boldsymbol{J},\ \rho^*,\ \rho,\ n_j,\ \mathbf{P}_j,\ \mathbf{T}),$$

$$\boldsymbol{R}_j\ \to\ s^3\boldsymbol{R}_j.$$

这样的性质普通称**相似原理**。也就是說，如果已經求得基本方程的一个解，把它的表达时間空間的各量乘以 s^{-1}，把表达时空各点的电磁場的量乘以 s，对其他的量也按上表乘以适当的系数，这样得到的結果也是一个解。

§61　二成分系和准二成分系

在基本方程(58.6)，(58.7)和(58.9)中，电流的微分方程是极其复杂的。但是在构成等离子体的各种粒子中只有电子是极輕的，根据这样的事实，在某种情况下可以把这个方程相当地简化。

先考虑这样一种情况，即等离子体是完全电离的，而且是由电子和仅仅一种正离子构成的。假設一个电子的质量为 m，电荷为 $-e$，单位体积中电子的个数为 n，并且假設大部分的負电荷被正离子抵消，即 $en\gg|\rho^*|$。离子和电子的平均速度近似地由 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}-(en)^{-1}\boldsymbol{J}$ 給出。在(58.9)中可以取 e^2n/m 为 $\sum e_j^2n_j/m_j$ 的近似值，取 $(e^2n\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{J})/m$ 为 $\sum e_j^2n_j\boldsymbol{v}_j/m_j$ 的近似值，含有重力的項可以省略。更假定由摩擦而产生的阻力与电子流体和离子流体的相对速度成正比，这样，$\sum e_j\boldsymbol{R}_j/m_j$ 就与电流密度 $\boldsymbol{J}$ 成正比。最后，关于 $\sum(e_j/m_j)(\mathbf{P}_j+m_jn_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j)$，从分子的观点来說，它就是 $\sum e_jn_j\langle\mathbf{c}_j\mathbf{c}_j\rangle$。在一般的情况下，电子粒子的速度比离子的速度大

得多，而且电子的速度分布几乎是各向相同的，因此可以把这个量简化为标量 $-eP_e/m$. 这里的 P_e 表示电子的分压。这样对于满足上述各条件的二成分系，可以用

$$\frac{m}{e}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}=en\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\right)-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\operatorname{grad}P_e \quad (61.1)$$

为电流方程的近似式。作为比例系数而导入的 σ 不外乎电导率。

方程(61.1)不仅对二成分系成立，当一切较重的构成粒子具有几乎相等的平均速度(即 $\boldsymbol{v}_i$)时，它也成立。这种情况叫做准二成分系。除去磁場非常强的情况，通常这样的条件是可以满足的。把这个問題再稍加定量地考察。

现在考虑这样一种情况，在均匀的稳定的静止着的中性气体中，只有很少数的原子电离了。假定这种气体除去中性原子以外，就只含有电子和一价正离子；并且把电子和离子的粒子密度都用 n 表示。根据假定，这个 n 要比中性原子的密度小得多。这时关于电子和离子的方程(58.2)分别为

$$K_e(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{v}_e=0$$

和

$$K_i(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{v}_i=0.$$

这里的 $\boldsymbol{v}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 分别为电子和离子的平均速度，$K_e\equiv-|K_e|$ 和 K_i 表示电子和离子的移动度。从第一式可得

$$\boldsymbol{v}_e=[K_e\boldsymbol{E}+K_e^2(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+K_e^3(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}]/(1+K_e^2B^2),$$

还可以得到

$$v_e^2\equiv|\boldsymbol{v}_e|^2=K_e^2[E^2+K_e^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2]/(1+K_e^2B^2).$$

从第二式可以得到关于离子的同样的关系式。但是 $|K_e|/K_i$ 的值約为 10^3，而且

$$\frac{v_i}{v_e}\lesssim\frac{K_i}{K_e}(1+K_e^2B^2)^{1/2},$$

因此只要 $|K_e|B\ll10^3$，就可以忽视离子的运动。

把 Maxwell 方程和(58.6)，(58.7)及(61.1)組合起来，就湊齐了准二成分系的等离子体力学的基础方程。相似原理也可作如下的簡化：即方程組对下列变换是不变的：

$$(\boldsymbol{r},\ t)\ \to s^{-1}(\boldsymbol{r},\ t),$$

$$\varepsilon,\ \mu,\ \phi,\ m/e,\ \boldsymbol{v}\ \text{不变},$$

$$(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H},\ \sigma)\ \to s(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H},\ \sigma),$$

$$(\boldsymbol{J},\ \rho^*,\ en,\ \rho,\ \mathbf{P},\ P_e)\ \to s^2(\boldsymbol{J},\ \rho^*,\ en,\ \rho,\ \mathbf{P},\ P_e).$$

§62 平面横波

现在考察一个具体問題，即在等离子体中傳播的平面横波。假設介质是中性的，不考虑重力，电子分压是一定的(即 $\rho^*=0$, $\operatorname{grad}\phi=0$, $\operatorname{grad}P_e=0$)。沿波的进行方向取 z 軸，并假設所有的量都与 x, y 无关，于是可以令：

$$\boldsymbol{B}=(b_x(z,\ t),\ b_y(z,\ t),\ B_0),\quad B_0>0,$$

$$\boldsymbol{J}=(J_x(z,\ t),\ J_y(z,\ t),\ 0),$$

$$\boldsymbol{v}=(v_x(z,\ t),\ v_y(z,\ t),\ 0),$$

$$\boldsymbol{E}=(E_x(z,\ t),\ E_y(z,\ t),\ 0).$$

这里的 $\boldsymbol{B}_0\equiv(0,\ 0,\ B_0)$ 是一定的磁感应强度，其他的量都是很小的，二乘方可以忽略。这就是說，所研究的对象是在一定的磁場中沿磁場方向傳播的振幅很小的横波。

在这种情况下普通导入复数計算，令

$$b_x+ib_y\equiv\mathfrak{b},\quad J_x+iJ_y\equiv\mathfrak{J},\ \text{等等。}$$

由(57.1)可得

$$i\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial t}=0,$$

由(57.3)可得

$$i\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial z}-\varepsilon\mu\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\mu\mathfrak{J},$$

从以上两式消去 $\mathfrak{b}$ 就得到

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t}. \tag{62.1}$$

在现在的情况下运动方程(58.7)成为：

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_0 - \mathrm{Div}\mathbf{P},$$

又可以写为

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -iB_0 \mathfrak{J} + \eta \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}. \tag{62.2}$$

但是在这里假定了有效粘滞系数为 η，还采用了

$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad P_{zy} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

的关系。关于电流方程

$$\frac{m}{e} \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = en(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 - \sigma^{-1}\boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_0$$

采取下面的形式：

$$\frac{m}{e} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = en(\mathfrak{E} - iB_0 \mathfrak{v} - \sigma^{-1}\mathfrak{J}) + iB_0 \mathfrak{J}. \tag{62.3}$$

为了导出色散公式，假定这些量的变化部分都只是 $\exp(-i\omega t + ikz)$ 这一因子，也就是令

$$\mathfrak{E} = E\exp(-i\omega t + ikz), \quad \mathfrak{J} = J\exp(-i\omega t + ikz), \text{等等。}$$

这样，从(62.1)可以得到

$$(-k^2 + \omega^2 \varepsilon\mu)E = -i\omega\mu J,$$

从(62.2)可以得到

$$(\omega\rho + ik^2\eta)v = B_0 J,$$

从(62.3)可以得到

$$\left(\omega \frac{m}{e} + B_0 + i\frac{en}{\sigma}\right) J = ienE + enBv,$$

从以上三式消去 E，J，v 就可以求得色散公式：

$$\left(\omega\frac{m}{e}+B_0+i\frac{en}{\sigma}-\frac{enB_0^2}{\omega\rho+ik^2\eta}\right)(\omega^2\varepsilon\mu-k^2)=en\mu\omega. \quad (62.4)$$

当角頻率 ω 很大时 $\omega^2/k^2 \to (\varepsilon\mu)^{-1}$，所討論的波就成为以光速 $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ 傳播的电磁波。而当 ω 很小时

$$\omega^2/k^2=B_0^2/\mu\rho, \quad (62.5)$$

这表示以 $B_0/\sqrt{\mu\rho}$ 的速度傳播的波动（这个速度比光速要小得多）。磁場除去 $B^2/2\mu$ 的靜压之外，沿磁感綫还有 B^2/μ 的張力[参照(47.8)]。当密度 ρ 的介质只因这个張力发生力学的振动时，波的速度应当是$(張力/密度)^{1/2}=B_0/\sqrt{\mu\rho}$。Alfvén 首先注意到这样的波动，所以称为 **Alfvén 波**。詳細的說明可以参照 Alfvén: Cosmical Electrodynamics (Oxford, 1950)。

如果忽視由阻力 σ^{-1} 和粘性 η 所产生的阻尼，色散公式就成为

$$\left(\omega\frac{m}{e}+B_0-\frac{enB_0^2}{\omega\rho}\right)(\omega^2\varepsilon\mu-k^2)=en\mu\omega. \quad (62.6)$$

特别是当 $B_0=0$ 时

$$k^2=\varepsilon\mu\left(\omega^2-\frac{e^2n}{\varepsilon m}\right). \quad (62.7)$$

使位移成为行波而傳播的最低角頻率为

$$\omega_p=\left(\frac{en}{\varepsilon m/e}\right)^{1/2}, \quad (62.8)$$

这就是所謂等离子体（角）頻率。它和电子密度 n 的平方根成正比。此外，电波的相速度由

$$\left|\frac{\omega}{k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$$

給出，群速度由

$$\left|\frac{d\omega}{dk}\right|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

給出。用这里所得到的結果能說明电波在电离层反射的現象。即

垂直入射于电离层的电波，在等离子体频率等于使用频率之处发生反射。

如果把(62.5)用图表示，则成为图 62.1 或类似的图形。行波的存在领域是分离的，有两部分是 $|\omega|$ 很大的电波领域，一部分是包含 Alfvén 波的所謂**流体磁波** (hydromagnetic wave) 領域。还可以知道，关于主磁感綫 $\boldsymbol{B}_0$ 的右旋圓偏振波和左旋圓偏振波的傳播速度不同。把 k 改成 $-k$ 結果不变，这說明当旋轉方向一定时波的傳播速度和 z 的正負方向无关。

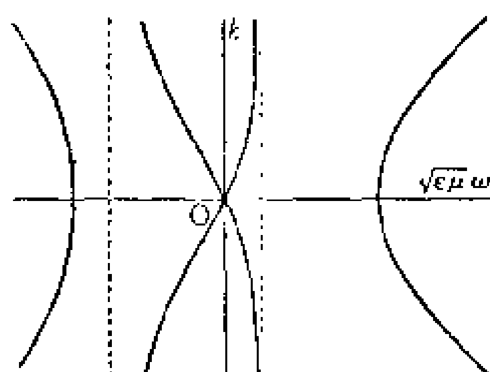


图 62.1 横波的色散公式的图示

在图的原点附近

$$\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{B_0^2}{\mu\rho}\left(1-\frac{\omega}{enB_0/\rho}\right),$$

因此 Alfvén 波(62.5)成立的条件是

$$|\omega|\ll enB_0/\rho.$$

周期现象的頻率 ω，对时間按照 $\exp(t/\tau)$ 变化的现象的变化率 τ^{-1} 等，如果都比 enB/ρ 小得很多，就称这些现象为**准靜态的**。換句話說，准靜态现象相当于运动方程(58.7)的慣性項 $\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t$ 比作用于电子集团的 Lorentz 力 $en(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 小得多而且可以忽略的情况。还需要指出，在§61开始所讲的二成分系中，enB/ρ 和所謂离子回旋加速頻率是一致的。

§63 电荷的纵振动

在沒有磁場的情况下，电流的方程(61.1)就成为

$$-\frac{m}{e}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}+en\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\right)+\operatorname{grad}P_e=0.$$

取它的 div 并利用(57.4)和(57.5)可以得到

$$\frac{m}{e}\frac{\partial^2\rho^*}{\partial t^2}+\frac{en}{\varepsilon}\rho^*+\frac{en}{\sigma}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla^2P_e=0, \tag{63.1}$$

ρ^* 是电荷密度。

在中性等离子体里，如果发生电子集团的疏密振动，就要有微小的电荷密度出现。现在就来研究这样的問題。电子分压 P_e 的微小变化和电子密度 n 的微小变化可以用下面的关系来联系：

$$\nabla^2P_e=(\partial P_e/\partial n)_{有效}\nabla^2n.$$

再考虑 $-e\nabla^2n=\nabla^2\rho^*$，就可以把(63.1)写为电荷所满足的方程：

$$\frac{\partial^2\rho^*}{\partial t^2}+\omega_p^2\rho^*+\omega_p^2\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P_e}{\partial n}\right)_{有效}\nabla^2\rho^*. \tag{63.2}$$

这里的 ω_p 不外乎等离子体频率(62.8)。

关于气态等离子体，在发生等温变化时系数 $\partial P_e/\partial n$ 应当等于电子的温度和 Boltzmann 常数的乘积；如果发生普通的絕热变化，$\partial P_e/\partial n$ 是上述乘积的 5/3 倍。现在的变化虽然是絕热的，严格地說，振动中的电子的速度分布并不是各向相同的，于是要比上述的数值多少大一点。因此，对于系数加上了“有效”的下标。

若取平面纵振动

$$\rho^*\propto\exp(-i\omega t+ikz),$$

就得到色散公式：

$$\omega^2-\omega_p^2\left(1-i\omega\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P_e}{\partial n}\right)_{有效}k^2. \tag{63.3}$$

当衰减项可以忽略时，就和(62.7)是同形式的。但是这里用电子流体的音波速度 $m^{-1/2}(\partial P_e/\partial n)^{1/2}$ 代替了光速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$。

§64　中性等离子体內的准定态現象与靜态現象

(57.3)的电感电流可以忽视，也就是

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \tag{64.1}$$

成立的場合，通常称为准定态现象。这时更进一步，考虑中性等离子体滿足以下两个条件的情况：在(61.1)中电子的惯性可以忽略；电子密度的变化方向和分压的变化方向一致，从而 $\mathrm{rot}(n^{-1}\mathrm{grad}\,P_e)=0$. 在这样的条件下电流方程(61.1)可以簡化为

$$\mathrm{rot}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-(en)^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\sigma^{-1}\boldsymbol{J}]=0. \qquad (64.2)$$

我們把(64.1)和(64.2)同时成立的情况叫做**准定态**。

这样的条件关于电磁場的量并不是綫性的。但是在多数的重要情况下可以把(64.2)近似地写为

$$\mathrm{rot}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\sigma^{-1}\boldsymbol{J}]=0. \qquad (64.3)$$

例如，从所要討論的对称性知道

$$\mathrm{rot}[(en)^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}]=0 \qquad (64.4)$$

是恒等成立的（§ 65）。又如在 § 62 的最后所定义的准静态现象中，如果 $\mathrm{rot}(n^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{P})$ 和 $\mathrm{rot}(n^{-1}\rho\,\mathrm{grad}\,\phi)$ 都是很小的量，$\mathrm{rot}[(en)^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}]$ 比 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 小得很多可以从运动方程中忽略。

当(64.1)和(64.3)成立时，由 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0$ 得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\right). \qquad (64.5)$$

当电导率 σ 是常数时，上式成为

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B} \qquad (64.6)$$

($\nabla^2=\mathrm{grad\,div}-\mathrm{rot\,rot}$). 这个关系式是流体磁学 (hydromagnetics) 的基础，时常称为**感应方程** (induction equation)。

当物质静止时，上式就成为扩散方程：

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=(\mu\sigma)^{-1}\nabla^2\boldsymbol{B}. \qquad (64.7)$$

由是可知磁感綫以 $(\mu\sigma)^{-1}$ 为扩散系数在物质中扩散。当扩散十分微小时感应方程就成为

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}), \qquad (64.8)$$

这个方程和表达非粘性流体中的渦旋运动的方程具有同一的形

式。設有曲面随着速度为 $\boldsymbol{v}$ 的場运动，通过这个曲面的一部分的磁通量 Φ 的时間变化率可以用下式給出：

$$\frac{d\Phi}{dt}=\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}+\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{s} \qquad (64.9)$$

这里的 $d\boldsymbol{S}$ 表示面积元素，ds 表示周界的綫元素，面积分是在全面分上取的，綫积分是在全周界上取的。用 Stokes 定理把右端第二项改写，(64.9)就成为

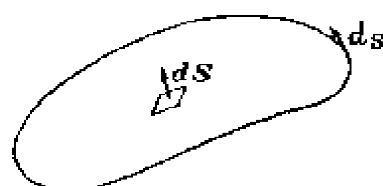


图 64.1　(64.9)的說明

$$\frac{d\Phi}{dt}=\iint\left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right]\cdot d\boldsymbol{S}=0. \qquad (64.10)$$

由此可知磁通量 Φ 是不变的. 按照 Alfvén 的說法，就是当电导率很大时(或者說在尺度很大的体系中)，磁感綫**冻結于**流体 (frozen in the fluid)。

关于“地球的磁場为什么能够持續”这一問題，可以用磁流体动力說 (hydromagnetic dynamo theory) 来解答，現在把它的要点介紹如下。在地球的內部有流体的核心，它的半徑是地球半徑的一半。在这个核心里存在着图 64.2a 所表示的磁感綫。核心的电导率是有限的，而磁感綫并不因扩散而消失，它能够持續的原因是什么，就成問題了。

这种球状流体虽在轉动，而在因对流而发生的混合过程中，角动量还是近似于守恒的，于是可以想象它的角速度并不是一致的，內部的要比外部的快一些。为了简单起見把球状流体近似地看作两个同心球，而且假定都以一定的角速度轉动，內部的比外部的快一些。于是冻結于流体的磁感綫經过图 64.2b 而变成图 c 那样的方向相反的环状磁感綫。

这种环状磁感綫的一部分，由于局部的对流有发生突起的可能。这时如果想象它周圍的流体发生台风那样的运动，突起的磁

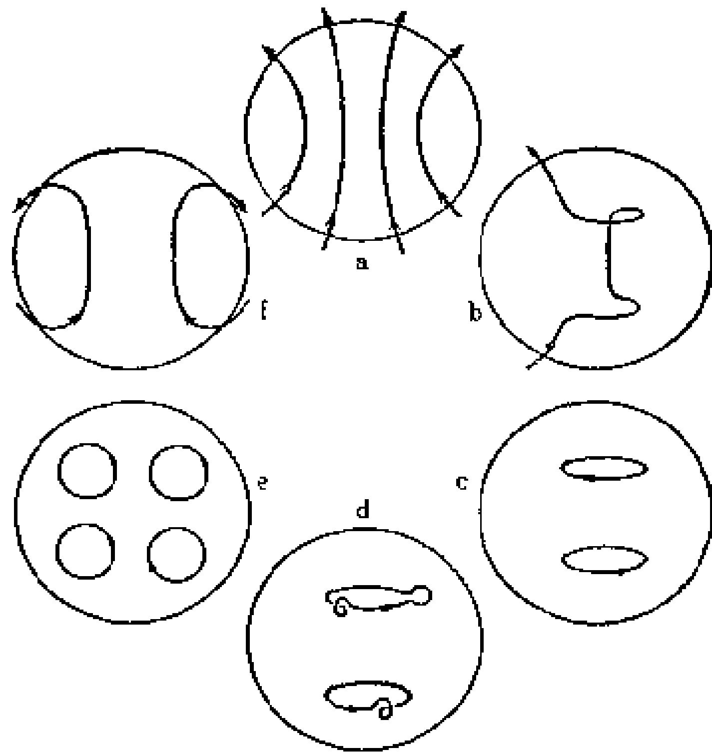


图 64.2 根据地球磁場的磁流体动力說想象的磁場变化过程 (W. H. Elsasser)

感綫在北半球的（从上面看）发生逆时針的扭轉，在南半球的发生順时針的扭轉。如果扭轉量不超过 180°，就变成图 d 那样，平均起来变成图 e 那样的磁感綫，經过图 f 变成最初假定的图 a 的磁感綫，結果使它增强。这样的机构能使地球磁場增强，扩散能使地球磁場减弱，两种机构互相平衡，于是地球磁場大体上保持稳定；用这样的方法来說明是最自然的。环状磁感綫的因对流而突起的部分，如果它的扭轉量达到 270° 的程度，由上述机构生成的磁感綫和最初的方向相反，这种情况和地球在过去常常发生的磁場逆轉現象也可能有关系。

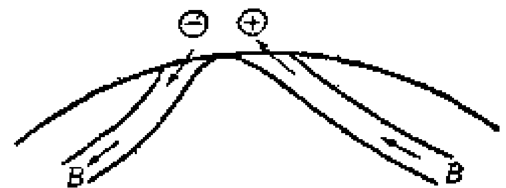


图 64.3 太阳的黑点对的生成 (W. M. Elsasser: Revs. Modern Phys. 1956)

这种动力学說也能应用于太阳，可以想象，在太阳的內部也存在着图 c 那样的磁感綫。如图64.3所示，拥現于太阳表面的就是极性相反的黑点对。同时也說明了这样一

件事实：比黑点对先出现的黑点的极性，在太阳的北半球的和南半球的正相反。

§65 軸对称的准稳定解

具有軸对称性的准定态变化的中性等离子体，在理論上很有趣味，在应用上也很重要。以 z 軸为对称軸，导入圆柱坐标 r, θ, z，并考虑所有的量都和 θ, z 无关的情况，令

$$\left.\begin{aligned}(B_r, B_\theta, B_z)&=(0, B_\theta(r, t), B_z(r, t)),\\(J_r, J_\theta, J_z)&=(0, J_\theta(r, t), J_z(r, t)),\\(v_r, v_\theta, v_z)&=(v_r(r, t), v_\theta(r, t), v_z(r, t)).\end{aligned}\right\}\tag{65.1}$$

不考虑重力場。中性，即 $\rho^*=0$ 的假定永远滿足电荷流的連續方程(57.5)。关于物质流，(58.6)成为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.\tag{65.2}$$

令 $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_z$ 为 r, θ, z 方向的单位矢量，在一般的情况下：

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{u}_r\cdot\mathbf{P})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{u}_\theta\cdot\mathbf{P})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{u}_z\cdot\mathbf{P}).$$

但是

$$\boldsymbol{u}_r\cdot\mathbf{P}=P_{rr}\boldsymbol{u}_r+P_{r\theta}\boldsymbol{u}_\theta+P_{rz}\boldsymbol{u}_z\ 等等,$$

更因为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{u}_r,\quad\frac{\partial\boldsymbol{u}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{u}_\theta$$

以及在圆柱坐标系中 $\mathbf{P}$ 的所有的分量都和 θ, z 无关，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Div}\,\mathbf{P}=&\boldsymbol{u}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rr})-\frac{1}{r}P_{\theta\theta}\right]\\&+\boldsymbol{u}_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{r\theta})+\frac{1}{r}P_{\theta r}\right]\\&+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz}).\end{aligned}$$

利用对称性 $P_{r\theta}=P_{\theta r}$ 还可以把上式改写成下面的形式

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}=\boldsymbol{u}_r\left[\frac{\partial}{\partial r}P_{rr}+\frac{1}{r}(P_{rr}-P_{\theta\theta})\right]$$

$$+\boldsymbol{u}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_{r\theta})+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz}).$$

用同样的方法可以得到

$$\mathrm{Div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r^2)-\frac{\rho}{r}v_\theta^2\right]$$

$$+\boldsymbol{u}_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r v_\theta)+\frac{\rho}{r}v_r v_\theta\right]$$

$$+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r v_z).$$

利用这些关系式就能計算出运动方程为

$$\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\mathrm{Div}(\mathbf{P}+\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=0.$$

利用 $\boldsymbol{J}=\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ 可以求得上式的 r 分量为

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_r-\frac{\rho}{r}v_\theta^2+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B^2}{2\mu}+P_{rr}\right)$$

$$+\frac{B_\theta^2}{\mu r}+\frac{1}{r}(P_{rr}-P_{\theta\theta})=0 \qquad (65.3)$$

(其中 $B^2=B_\theta^2+B_z^2$)，θ 分量和 z 分量分别为

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_\theta+\frac{\rho}{r}v_r v_\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_{r\theta})=0 \quad (65.4)$$

及

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_z+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz})=0. \qquad (65.5)$$

在这些方程中 $\partial/\partial t+\partial/\partial r$ 是实质的加速度，$\rho v_\theta^2/r$ 是离心力，$-\rho v_r v_\theta/r$ 是 Coriolis 力(的一部分)。已經知道,磁感綫具有 $B^2/2\mu$ 的静压力同时还在纵的方向呈現出 B^2/μ 的張力；这样的結果也出現在(65.3)里。可以証明，如果用

$$P_{rr}=P+\frac{2}{3}\eta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$P_{\theta\theta}=P+\frac{2}{3}\eta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-2\eta\frac{v_r}{r},$$

$$P_{r\theta}=-\eta r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right),\quad P_{rz}=-\eta\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

把各向相同的粘性系数 η 导入，方程(65.3)，(65.4)，(65.5)就和 Navier-Stokes 方程一致。实际上粘性系数并不一定是各向相同的。

在当前的情况下，(65.4) 正确地成立，从而 (65.3) 也成立，(65.5)则为

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}(v_r B_\theta)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)\right),\qquad(65.6)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_rB_z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu\sigma}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right).\qquad(65.7)$$

对于可以忽视电阻的等离子体，从这些方程以及連續方程 (65.2) 可以得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_\theta}{r\rho}=0\qquad(65.8)$$

及

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_z}{\rho}=0.\qquad(65.9)$$

由此可知，在随着流运动的一点上，B_z 和 B_θ/r 都和物质的密度 ρ 成正比（从磁感綫冻結于流体的事实也能知道这是当然的结果）。在随着流运动的点上比值 B_θ/rB_z 也是一定的：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_\theta}{rB_z}=0.\qquad(65.10)$$

作为具体問題，考察在应用上重要的柱形高温等离子体。假設等离子体是完全电离的，它的电导率很小，在柱里流动的电流有

z, φ 两个分量，而且在离柱很远的場所磁感綫也很少。在这种情况下如果把电流增强，把柱箍縮成圓形的磁感綫也增加，圓柱因压力的箍縮而变細。这样的現象叫做**箍縮**(pinch)**效应**。因为在一定的质点上 B_θ/rB_z 是一定的，所以随着箍縮的增强磁感应的 z 分量 B_z 比 θ 分量 B_θ 有显著的增加。如果电流的增加是急剧的，新增加的电流在表面的附近流动，于是磁感綫的分布将成为图 65.1 所示的状况，为了使問題理想化，我們采用电流仅存在于等离子体柱面的模型：

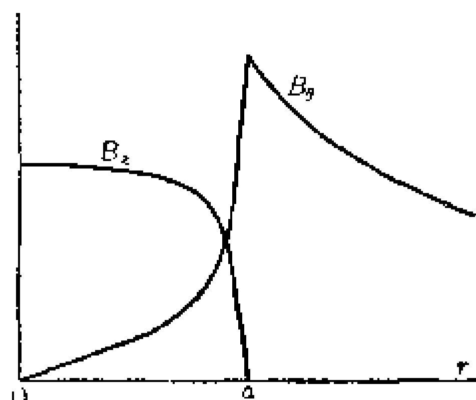


图 65.1 被箍縮的等离子体柱内外的磁感綫密度(可能的形状)。B_z 是軸方向的分量，B_θ 是角方向的分量。用模型(65.11)作为第一近似，而模型(66.19)更为接近

$$\sigma=\begin{cases}\infty,\\0,\end{cases}\quad (B_r,\ B_\theta,\ B_z)=\begin{cases}(0,\ 0,\ B_0), & 0\leqslant r<a,\\(0,\ B_1a/r,\ 0), & r>a.\end{cases}\tag{65.11}$$

这里假設 $a(t)$ 是柱的半徑，B_0, B_1 仅是时間 t 的函数。并假設等离子体内的密度也是均匀的。

关于流体的速度 $\boldsymbol{v}$，設 $v_\theta=v_z=0$，假設箍縮并不是极端地急速，(65.3)的慣性項 $\rho(\partial t+v_r\partial/\partial r)v_r$ 可以略掉。这样，等离子体中的粒子速度在垂直于柱的平面内将是等向性的，因此

$$P_{rr}=P_{\theta\theta}\quad (\neq P_{zz}\ 一般說)。\tag{65.12}$$

从而根据(65.3)知道，在柱中 P_{rr} 是均匀的。因为物质压力同磁感綫压力之和在柱面两側必須相等，当外部的物质压力能够忽视时

$$P_{rr}+(2\mu)^{-1}B_0^2=(2\mu)^{-1}B_1^2\tag{65.13}$$

必然成立。冻結于等离子体的总磁感綫 Φ 为 πa^2B_0，这是定值；总纵电流 I 則由 $2\pi aB_1/\mu$ 給定。因而上式可以变形为

$$P_{rr}+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Phi}{\pi a^2}\right)^2=\frac{\mu}{2}\left(\frac{I}{2\pi a}\right)^2.\tag{65.14}$$

如果因放射以及其他原因损失的能量可以忽視，当箍縮过程在絕热状态中进行时，P_{rr} 則与 ρ^{γ} 即与 $a^{-2\gamma}$ 成正比。这里的 γ 相当于热力学中的定压比热与定容比热之比，对于在强磁場中温度非常高的等离子体，能取 $\gamma=2$. 这么(65.14)的左端則与 a^{-4} 成比例，因为 a 与 I 互成反比，也就說柱的半徑与纵电流 I 成反比，完全电离的等离子体的温度与 P_{rr}/ρ 成正比，所以密度及温度皆与 I^2 成正比。

以上用最理想的模型考察了箍縮效应，当然实际情形要复杂得多。关于这个問題就讲到这样的程度，在下一节来討論稳定性。

§66 被箍縮的等离子体柱的稳定性

1) 淺易的說明 当較强的电流在柱軸的平行方向通过等离子体柱时，柱就要受到产生在它的周圍的磁感綫的束縛。如果这个等离子体內不存在磁感綫，这个等离子体就是不稳定的。若某处发生收縮，圍繞該处的磁感綫的密度增大，該处就更加收縮，終于使柱断开(参照图66.1a)。

象模型(65.11)那样，使磁感綫在纵的方向通过等离子体柱就可以消除这种不稳定性。考虑滿足(65.13)的平衡等离子体柱(65.11)，这时 a, B_0, B_1 都是常数。如果这个等离子体柱象图b那样沿着軸的方向发生徐緩的收縮，一部分的半徑将从 a 变为 $a(1-\delta)$ (δ 是 z 的緩慢变化的函数)。这时，这部分的磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 变为：

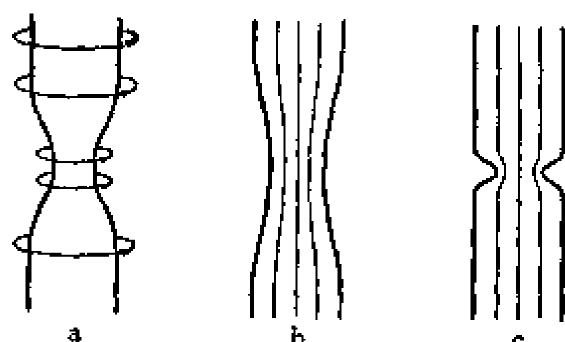


图66.1 在等离子体柱內通入纵向磁感綫，使柱对收縮的不稳定性(a)变为稳定的

$$(B_r,\ B_\theta,\ B_z)=\begin{cases}(0,\ 0,\ B_0(1-\delta)^{-2}), & 0\leqslant r<a(1-\delta),\\(0,\ B_1a/r,\ 0), & r>a(1-\delta).\end{cases}$$

内部的物质压力和磁感綫的压力的和为 $P_{rr}+B_0^2/2\mu(1-\delta)^4$，或者因 δ 很小而成为 $P_{rr}+B_0^2(1+4\delta)/2\mu$；而柱面外侧近处的磁感綫的压力为 $B_1^2/2\mu(1-\delta)^2$ 或 $B_1^2(1+2\delta)/2\mu$。于是等离子体柱对于徐緩收縮的稳定条件为 $2B_0^2>B_1^2$。

当等离子体柱以很大的傾斜收縮时（图 c），柱内的磁感綫密度在表面附近的特别大，于是关于变形的稳定条件就比上述的条件緩和一些。就现在的簡单模型来說，当发生收縮时使柱保持稳定的充要条件可以由

$$2B_0^2>B_1^2\quad(>B_0^2)\tag{66.1}$$

給出。这相当于等离子体内的磁感綫的压力大于物质压力的情况。

这样使很强的磁感綫在纵向通过等离子体柱，就能使柱对于收縮保持稳定。但是这种变形不一定都是軸对称的，可能发生种种非軸对称的变形。现在就来討論这种变形的稳定性。这里只考虑一种最重要的弯曲变形。如果柱内沒有纵向磁感綫，当柱的某一处发生弯曲时，內側的磁感綫密度增大就更加弯曲，終于使等离子体逸散（图 66.2a）。在这种情况下，纵向磁感綫也能使等离子体柱趋向于稳定。很明显，对于小波长的弯曲只有纵向磁感綫的張力就能維持稳定（图 b）。对于长波长的弯曲只靠磁感綫的張力并得不到完全的稳定性。这样的問題可以用下面的方法来說明。

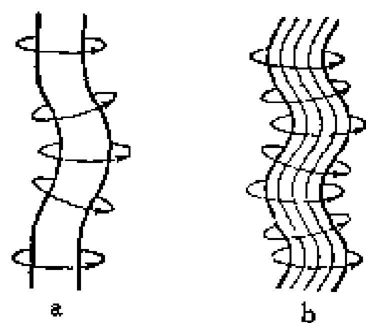
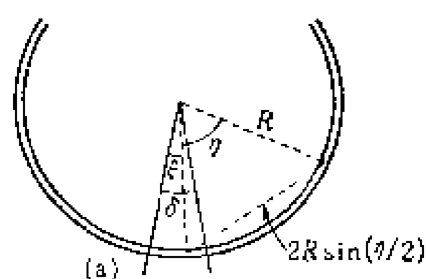


图 66.2 等离子体柱对弯曲的不稳定性 (a) 由于通入纵向磁感綫使小波长的弯曲变为稳定的

当半徑为 a 的等离子体柱 (65.11) 以大致均匀的曲率半徑

$R(\gg a)$ 弯曲时，纵向磁感綫的張力产生使柱向内弯曲的作用力，它在每单位长度内的大小为 $\pi a^2 B_0^2/\mu R$. 而纵向电流产生使柱向外伸張的作用力，当 a/R 很小时，它大于向内的作用力。按照图 66.3a 选擇满足 $a \ll \delta R \ll R$ 的 δ. 纵向电流 I 在 δR 部分的作用力可以用 Biot-Savart 公式求得：



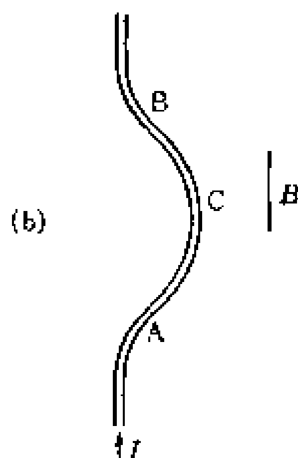


图 66.3　在等离子体柱内通入纵向磁感綫，在外部加以纵向磁感綫，都不能使柱对于徐緩的弯曲保持稳定

$$\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta\int_{\delta-\xi}^{2\pi-\xi}\frac{\sin(\eta/2)}{[2R\sin(\eta/2)]^2}R^2\,d\eta\,d\xi$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta\int_{\delta-\xi}^{2\pi-\xi}\frac{d\eta}{4\sin(\eta/2)}\,d\xi$$

$$=-\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta\log\tan\frac{\xi}{4}\,d\xi$$

$$\doteqdot-\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta\log\frac{\xi}{4}\,d\xi$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\,\delta\left(\log\frac{4}{\delta}+1\right).$$

但是因为 $I=2\pi aB_1/\mu$，所以上述的量等于

$$\pi a^2 B_1^2\mu^{-1}\delta[\log(4/\delta)+1],$$

大于纵向磁感綫产生的使 δR 向内弯曲的力 $\pi a^2 B_0^2\mu^{-1}\delta$. 結果等离子体柱 (65.11) 对于以大曲率半徑徐緩弯曲的变形是不稳定的。

这样，通着纵向电流的等离子体柱对于徐緩的弯曲并不是完全稳定的。即使在外部加以平行磁感綫也不能消除这种不稳定性。当柱象图 b 那样发生徐緩的弯曲时，A 点移向近方，B 点移向远方。这时柱变成螺綫形在 C 点有 Lorentz 力作用于外侧。对于軸向周期(即螺距，pitch) 較长的螺綫形变形，用内部磁感綫的張力不能把 Lorentz 力完全抵消，所以不稳定。这样的問題可以用

下面的方法說明。在一般的情况下，螺綫

$$x=A\cos\tau,\quad y=A\sin\tau,\quad z=A\tau\tan\alpha$$

(A 和 α 都是常数)的曲率半徑为 $A^{-1}\cos^2\alpha$，z 軸和螺綫的交角为 α。当細的等离子体柱以长周期 ($a/A\ll 1\ll\tan\alpha$) 向这种形状变形时，内部的磁感綫使柱趋向于稳定的作用力和 $A^{-1}\cos^2\alpha$ 成正比，較弱于和 $\cos\alpha$ 成正比的使柱趋向于不稳定的作用力。

把导管套在等离子体柱的外面，使管壁和柱适当地接近，就能消除等离子体柱对于徐緩弯曲的不稳定性。因为等离子体柱发生弯曲时，圍繞弯曲部分的圓形磁感綫要受到管壁和等离子体柱的更强烈的押挤使柱回复原状。至于管壁和柱接近到什么程度才能使柱稳定，需要通过計算才能知道。

2) **由簡单的模型求得稳定条件**　把等离子体看做压力密度均匀的完全导体，并且假定管壁和等离子体柱之間的物质压力可以忽略。令柱的半徑为 a，管的內半徑为 b，这里再一次采用表面电流模型(65.11)，也就是令平衡时的磁感强度 $\boldsymbol{B}^0$ 的分量为

$$(B_r^0,\ B_\theta^0,\ B_z^0)=\begin{cases}(0,\ 0,\ B_0), & 0\leqslant r<a,\\ (0,\ B_1a/r,\ 0), & a<r<b.\end{cases}\tag{66.2}$$

这里假定 B_0 和 B_1 为常数并且滿足平衡条件(65.13)，即滿足

$$P_{rr}+(2\mu)^{-1}B_0^2=(2\mu)^{-1}B_1^2.\tag{66.3}$$

当这个等离子体柱受到微小的变形时，如果能回复原状，就是稳定的；如果变形継續成长就是不稳定的。这时只考察关于 θ, z 坐标的周期变形就足够了。这里假設位移为：

$$(\xi_r(r),\ \xi_\theta(r),\ \xi_z(r))\exp(ikz+im\theta),$$
$$k>0,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.\tag{66.4}$$

$m=0$ 表示軸对称的收縮，$|m|=1$ 表示弯曲，当 $|m|=2$ 时横截面成椭圓形。令时間因子为 $\exp(t/\tau)$，如果成长时間 τ 的二乘方大于0，等离子体柱不稳定，小于0則稳定(根据完全导体的假設，τ^2

是实数)。如果以推求稳定与不稳定的界綫为目的,不附加时間因子而假定变形永远保持平衡以无限小的速度进行。最初的均匀压力、密度这时保持不变。也就是位移的 div 为 0:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_r)+\frac{im}{r}\xi_\theta+ik\xi_z=0. \tag{66.5}$$

又从运动方程得到

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=0 \tag{66.6}$$

的結果。

这样的保持着平衡而进行的变形当然包括在§62定义的准静现象里,所以§64的感应方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{66.7}$$

在等离子体内部成立。如果設位移矢量为 $\boldsymbol{x}$,则經过微小变形的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可由

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^0+\mathrm{rot}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B}^0)$$

給出。更具体一点,可以令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^0+\boldsymbol{B}^i(r)\exp(ikz+im\theta). \tag{66.8}$$

(上标 i 表示内部, interior), 于是

$$\left.\begin{aligned}&B_r^i=ik\xi_r B_0,\\&B_\theta^i=ik\xi_\theta B_0,\\&B_z^i=\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_r)-\frac{im}{r}\xi_\theta\right]B_0=ik\xi_z B_0,\end{aligned}\right\} \tag{66.9}$$

在这里利用了(66.5)。

在等离子体内部,(66.6)和 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}^i\times\boldsymbol{B}^0=0$, 即

$$\mathrm{rot}_r\boldsymbol{B}^i=0,\quad \mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{B}^i=0$$

是等价的。从以上各式可以求得

$$k\xi_\theta=\frac{m}{r}\xi_r,\quad k\xi_r=-i\frac{d}{dr}\xi_r. \tag{66.10}$$

代入(66.5)就得到关于 ξ_z 的微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\xi_z}{dr}\right)-\left(k^2+\frac{m^2}{r^2}\right)\xi_z=0. \tag{66.11}$$

这个方程能被变形 Bessel 函数 $I_m(kr)$, $K_m(kr)$ 所适合，若选取在 $r=0$ 正则的解，则有

从(66.10)得

$$\left.\begin{aligned}\xi_z&=CI_m(kr),\\ \xi_\theta&=C_mI_m(kr)/kr,\\ \xi_r&=-iCI'_m(kr).\end{aligned}\right\} \tag{66.12}$$

这里 $I'(x)\equiv dI/dx$, 而 C 是常数。

在等离子体外部，磁感应强度由 ψ 决定，即

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{grad}\,\psi,\quad \nabla^2\psi=0.$$

这里若令

$$\psi=\psi^0+\psi^e(r)\exp(ikz+im\theta),\quad \boldsymbol{B}^0=\mathrm{grad}\,\psi^0$$

(上标 e 表示外部，exterior)，则 ψ^e 适合与(66.11)同形的微分方程，具有通解

$$\psi^e=C_1K_m(kr)+C_2I_m(kr).$$

于是若令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^0+\boldsymbol{B}^e(r)\exp(ikz+im\theta), \tag{66.13}$$

则

$$\left.\begin{aligned}B^e_r(r)&=k[C_1K'_m(kr)+C_2I'_m(kr)],\\ B^e_\theta(r)&=im[C_1K_m(kr)+C_2I_m(kr)]/r,\\ B^e_z(r)&=ik[C_1K_m(kr)+C_2I_m(kr)].\end{aligned}\right\} \tag{66.14}$$

常数 C_1 与 C_2 由边界条件决定。因为在等离子体内部磁感綫已冻結于流体，所以变形后在表面上沒有垂直于表面的分量。从而外部的 $\boldsymbol{B}$ 在等离子体表面上与管壁上沒有垂直分量。在等离子体表面的外側的附近，本来就有仅具 θ 分量 B_1 的磁感綫，它随同等离子体表面的变形而变形，因此可由边界条件

$$B_r^e(a) = ima^{-1}\xi_r(a)B_1,\quad B_r^e(b) = 0 \tag{66.15}$$

給出。这样就能决定

$$C_1 = \frac{im}{ka}\xi_r(a)B_1\frac{I_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)},$$

$$C_2 = -\frac{im}{ka}\xi_r(a)B_1\frac{K_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)}.$$

在稳定与不稳定的分界綫上，等离子体虽然变形也应当保持平衡。因此在表面內側附近的磁感綫的压力的变化与在外側附近的变化必須相等：

$$B_0B_z^i(a) = B_1B_\theta^e(a) - B_1^2a^{-1}\xi_r(a). \tag{66.16}$$

利用已經求到的諸式能得到

$$\frac{B_0^2}{B_1^2} = \frac{I_m'(ka)}{kaI_m(ka)}\left[1 + \frac{m^2}{ka}F(ka, kb)\right], \tag{66.17}$$

$$F(ka, kb) \equiv \frac{K_m(ka)I_m'(kb) - I_m(ka)K_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)}. \tag{66.18}$$

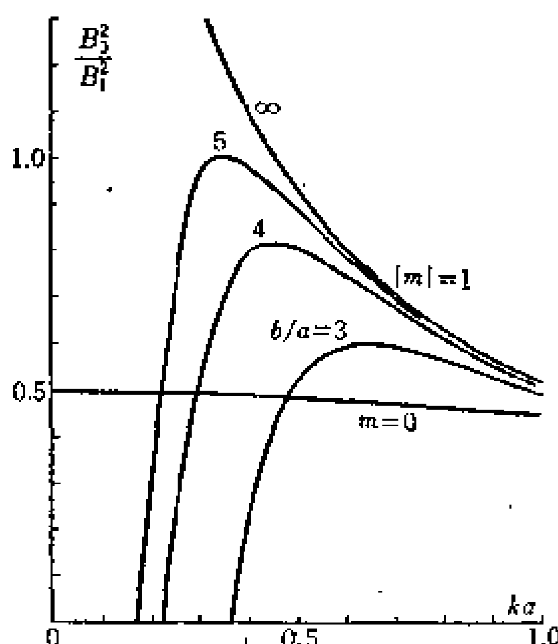


图 66.4　使等离子体柱模型(66.2)成为稳定的内部纵磁感綫。因为 B_0^2/B_1^2 不超过 1，所以 $b/a<5$ 是稳定的必要条件

图 66.4 所描繪的就是这种关系。$|m|\geqslant 2$ 的曲綫将出現于右下方。

于是求得了保持着平衡而变形的条件。等离子体柱內纵磁感綫的密度 B_0 若比圍繞柱的圓形磁感綫的密度 B_1 小得很多，柱就是不稳定的；若管的半徑 b 充分接近于等离子体柱的半徑 a，柱就是稳定的。很明显，对于各 m，k，图 66.4 的曲綫的上部表示稳定的情况，下部表示不稳定的情况。因为 B_0^2/B_1^2 不能超过 1，为了使柱稳定，对于一切变形 $b/a<5$

是必要的。当 $b/a=4$ 时 $B_0^2/B_1^2>0.82$，$b/a=3$ 时 $B_0^2/B_1^2>0.60$ 都是稳定的充要条件。

3) **模型的改良** 到现在为止都假設电流只在等离子体柱的表面通过。从图 65.1 也可以知道，如果能用更接近于实际的模型来进行計算，当然很好了。現在我們把(66.2)稍加普遍化，取变形前的磁感綫密度为

$$(B_r^0,\ B_\theta^0,\ B_z^0)=\begin{cases}(0,\ B_0\alpha r,\ B_0), & 0\leqslant r<a,\\(0,\ B_1a/r,\ B_2), & a<r<b.\end{cases}\qquad(66.19)$$

这里 B_0，B_1，B_2 都是常数，但是为了把模型具体化都取为正值，αa 也是正值，并且假定它是很小的值以致于它的二乘方可以忽略。現在研究等离子体柱和管壁之間存在的纵向磁感綫对稳定性的影响，以及在等离子体柱的内部通过的电流对稳定性的影响。

如果忽略 $(\alpha a)^2$，在平衡状态的等离子体内部的物质压力是均匀的，平衡条件可由

$$P_{rr}+(2\mu)^{-1}B_0^2=(2\mu)^{-1}(B_1^2+B_2^2)\qquad(66.20)$$

給出。

在等离子体内部，位移(66.4)满足方程(66.5)，(66.8)的 $\boldsymbol{B}^i$ 能够不用(66.9)而用

$$B_r^i=i(k+m\alpha)B_0\xi_r,\quad B_\theta^i=i(k+m\alpha)B_0\xi_\theta,$$
$$B_z^i=i(k+m\alpha)B_0\xi_z$$

給出。从(66.6)即从

$$\boldsymbol{B}^0\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}^i+\boldsymbol{B}^i\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}^0=0$$

能导出

$$k\xi_\theta=\frac{m}{r}\xi_z+\frac{2\alpha}{k}\frac{d\xi_z}{dr},$$

$$k\xi_r=-i\left(\frac{d\xi_z}{dr}+\frac{2\alpha}{k}\frac{m}{r}\xi_z\right),$$

代入(66.5)就能得到和(66.11)相同的关于 ξ_z 的方程。結果

(66.12)就一般化为

$$\xi_z = CI_m(kr),$$

$$\xi_\theta = C\left[\frac{m}{kr}I_m(kr) + \frac{2\alpha}{k}I'_m(kr)\right],$$

$$\xi_r = -iC\left[I'_m(kr) + \frac{2\alpha}{k}\frac{m}{kr}I_m(kr)\right].$$

关于等离子体外部亦能作同样討論，直到(66.14)为止都照旧成立。若把边界条件(66.15)置换为

$$B_r^e(a) = i\xi_r(a)(ma^{-1}B_1 + kB_2), \ B_r^e(b) = 0,$$

(66.16)置换为

$$B_0B_z^i(a) + B_0\alpha aB_\theta^i(a) = B_1B_\theta^e(a) + B_2B_z^e(a) - B_1^2a^{-1}\xi_r(a),$$

最后得到相当于(66.17)的关系式:

$$\frac{B_0^2}{B_1^2} = \frac{I'_m(ka)}{kaI_m(ka)}\left[1 - \frac{2m\alpha}{k}\left(1 - \frac{I_m(ka)}{kaI'_m(ka)}\right)\right]$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{ka}\left(m + ka\frac{B_2}{B_1}\right)^2 F(ka, kb)\right]. \qquad (66.21)$$

从(66.20)可以知道，$B_0^2/(B_1^2+B_2^2)$不能超过1，因此，如果从(66.21)把这个量导出，对于一切的 $m=0, \pm1, \pm2, \cdots$，以及对于一切的 $ka>0$，它都不能超过1，这就是稳定的必要条件。最容易成为不稳定的是 $m=-1$ 的場合，图66.5所画的是当 $m=-1$，$b/a=3$ 时这个量和 ka 的关系。如果在等离子体柱和导体壁之間存在着磁感綫，即使很少量也能使稳定度显著地降低。如果在等离子体柱的内部有电流通过，稳定度也多少降低一些。这种現象可以这样理解：表面电流和内部电流同时存在的等离子体柱，有效半徑縮小，但仍旧是稳定的。

4) 不稳定的等离子体中的位移的成长率 当等离子体柱不滿足稳定条件时，关于使柱不稳定的固定的 m, ka，位移随时間的因子 $\exp(t/\tau)$而增大。把位移的成长率 τ^{-1} 在滿足准靜条件 $\tau^{-1}\ll$

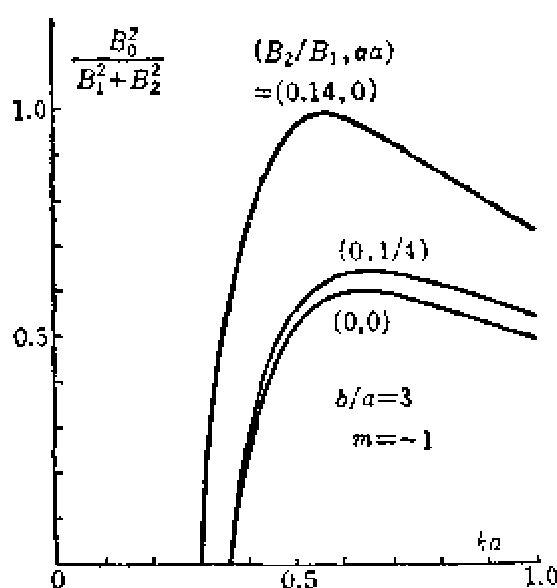


图 66.5　在模型(66.19)，αa 和 B_2 的影响。$b/a=3$，$m=-1$ 的場合

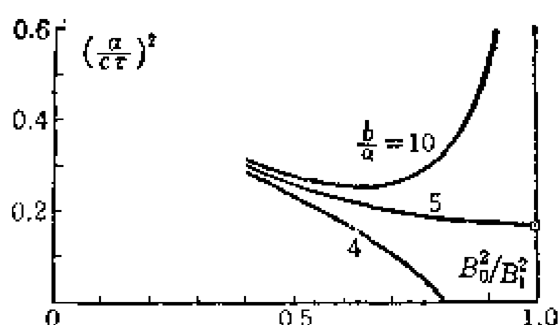


图 66.6　不稳定的等离子体中的位移的成长率 τ^{-1}，用模型(66.2)，c 表示音速。小圆所表示的是一种奇点

enB/ρ(§62，§64)的范围内就模型(66.2)来計算，所得的結果可以用图 66.6 表示。以柱的半徑 a 乘 τ^{-1} 再除以音速 $c=[(5/3)\cdot P/\rho]^{1/2}$，所得的結果是无量綱的量，所以取它的自乘为纵軸。当 $b/a>5$ 时，在物质压力較小之处，即等离子体的慣性較小之处 τ^{-1} 較大。而 $b/a=5.0$，$B_0^2/B_1^2=1$ 这一点，是很有趣味的奇点。

参考文献

偏微分方程在自然科学以及在各种工程方面的应用是非常广泛而多样化的。

在本丛书的基础篇中，有南雲道夫的偏微分方程，吉田耕作的泛函分析，岩村联的广义函数等許多項目都和偏微分方程有关系，而且以現代数学特有的严密而端正的形式給出了正向各方向发展的各部門的概況。

本項目幷不是在数学的立場严密地編写的，是专着眼于应用，特别是为物理学以及其实用性而写的。第 1 章至第 4 章以介紹在处理本征值問題及边界值問題时所常用的种种方法和物理意义为目的。第 5 章至第 8 章以扩散、散射、折射、电磁波以及等离子体等专题为中心具体地介紹了偏微分方程在各方面的应用。对各章的参考文献列举若干于下。

关于第 1 章至第 4 章的有

H. Bateman: Partial Differential Equations of Mathematical Physics (Cambridge, 1932).

R. Courant-D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I. (Springer, 1931), II (Springer, 1937). I, II 均有英譯本, I 有中譯本 (Interscience. 1953).

Ph. Frank-R. von Mises: Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I (Vieweg, 1925).

Ph. M. Morse-H. Feshbach: Methods of Mathematical Physics, I & II (McGraw-Hill, 1953).

A. Sommerfeld: Partial Differential Equations of Physics (Academic Press, 1949).

A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, Bd. II. Erweiterte Auflage des wellenmechanischen Ergänzungsband (Vieweg, 1939).

A. G. Webster-G. Szegö: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik (Teubner, 1930).

F. Schlögl: Handbuch der Physik, Bd. I. Mathematische Methode I. (Springer, 1956), 218～352.

前三本是大本的經典著作，其中 Courant-Hilbert 的著作既有数学的严密性也富于实用性，是良好的书籍。Morse-Feshbach 的著作是大本的近著，物理

的内容丰富。Sommerfeld (1949) 及 Schlögl (1956) 的著作頁数虽不很多但是能尽其要。

第1章的参考书可参看南雲道夫担当的項目中所列举的参考书目。关于第2章可参照本丛书小谷正雄等人的項目。关于特征函数展开的完整理論由小平邦彥所給出：

关于二阶常微分算子的本征值問題，数学（日文，岩波）：第1卷，第3号(1948).

其初等化的証明法見于

吉田耕作：积分方程（日文，岩波），

但从平易的意义說，則以

E. A. Coddington-N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations (1955)

为优。多数的例題于

Titchmarsh: Eigenfunction Expansion associated with Second Order Differential Equations (Oxford, 1946)

中作为一般理論的例子而給出，对于关心具体問題而研究应用方面的人可能是最有益的一本书。

以統一观点綜覽特殊函数全面的則有新著

柴垣和三雄：特殊函数論（共立社，1952）。

第3章，第4章讲解以 Green 函数为主要工具求解边界值問題，始值問題的方法，在

Schlögl（前見），Morse-Feshbach（前見）之外，玆举

S. Bergman-M. Schiffer: Kernel Functions in Mathematical Physics (1953).

D. Iwanenko-A. Sokolow: Klassische Feldtheorie (Akademie Verlag, 1953),

各作为基础叙述及应用立場的一个代表。

第5章 作为关于扩散問題的一般参考书有

S. Chandrasekhar: Radiative Transfer (Oxford University Press, New York, 1950)

Case de Hoffmann and Placzek: Introduction to the Theory of Neutron Diffusion (U. S. Government Printing Office, Washington D. C.) Vol. 1.

关于互易关系有

K. M. Case: Transfer Problems and the Reciprocity Theorem. Revs. Modern Physics, **29**, 651 (1957).

关于反应堆内中子的扩散，例如

S. Glasstone and M. C. Edlund 合著，伏見，大塚合訳：原子炉の理論(日文，みすず書房，1955).

第 6 章　关于散射的短波长极限，例如

P. M. Morse and H. Feshbach (前見)。

关于色散公式与因果律的經典理論参看下列論文。

N. G. van Kampen: Phys. Rev., **89**, 1072 (1953); **91**, 1267 (1953).

J. S. Toll: Phys. Rev., **104**, 1760 (1956).

D. Y. Wong: Phys. Rev., **107**, 303 (1957).

关于由屏栅孔而产生的折射，

H. Levine and J. Schwinger: Phys. Rev., **74**, 958 (1948); **75**, 1423 (1949). 由管端所发出声波的角分布以及关于修正管长的严密处理，同著者在 Phys. Rev., **73**, 383 (1948) 发表的文章甚有趣味。

第 7 章　兹举几本以 MKS 合理單位制所写的电磁学的书于下：

小谷正雄：电磁气学(日文，岩波讲座，現代物理学)。

宮島龍興：电磁气学(日文，みすず書房，1952).

B. I. Bleaney and B. Bleaney: Electricity and Magnetism (Oxford, 1957).

J. A. Stratton: Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, 1941).

电磁波的一般参考书则有

S. A. Schelkunoff: Electromagnetic Waves (D. van Nostrand Co., New York, 1943). 并且附加

A. Sommerfeld (前見)第 6 章。

論述包含变分法，WKB 法，准靜态处理等的近似解法的微波边界值問題的有

木原太郎：导波管(日文，修教社，1947)。

F. E. Borgnis und C. H. Papas: Randwertprobleme der Mikrowellenphysik (Springer, 1955).

討論經典的折射問題并包括最近文献的有

W. Franz: Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen (Springer, 1957).

把电磁波作为数学而发展的有

C. Müller: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen (Springer, 1957).

第8章 作为流体磁学的經典著作有

H. Alfvén: Cosmical Electrodynamics (Oxford, 1950).

但此书的太阳黑点的理論現在认为不正确。在这方面还有

T. G. Cowling: Magnetohydrodynamics (Interscience Publishers, New York, 1957).

关于高温等离子体，有

L. Spitzer: Physics of Fully Ionized Gases(Interscience Publishers, 1956).

关于和处理等离子体現象論的第8章相对应的分子論，木原太郎将写出等离子体物理学一书，作为岩波讲座現代物理学(第二版)的一分册出版(1959)。